Gimnazija "Svetozar Marković", Niš
Dodatna nastava iz matematike za 3. i 4. razred
Subota, 07.10.2006

KOMBINATORIKA

predavač: *Marko Petković*

1. Za okruglim stolom sede n osoba. Na početku svaka ima po jednu kuglicu. U jednom potezu uoče se dve osobe, A i B (ne obavezno različite) i svaka da jednoj od susednih osoba tačno jednu kuglicu. Pri tome, osobe A i B ne smeju odabrati susede sa istih strana (obe levog ili obe desnog suseda). Da li je posle konačno mnogo koraka moguća situacija da jedna osoba ima svih n kuglica?

2. Posmatrajmo parcelu dimenzija $m \times n$ na kojoj je u početku manje od $\frac{m+n}{2}$ polja zaraslo u korov. Korov se širi tako što svakog sledećeg dana zarastu polja koja su prethodnog dana imala 2, 3 ili 4 susedna polja pod korovom. Da li posle konačno mnogo dana mogu sva polja da budu pod korovom?

3. **a)** Dokazati da je moguće pokriti tablu $a \times b$ dominama $1 \times n$ (i $n \times 1$) akko $n \mid a$ ili $n \mid b$.

b) Dokazati da je moguće sastaviti kvadar $a \times b \times c$ od blokova $1 \times 1 \times n$ akko n deli bar jedan od brojeva a, b i c.

4. Svaka tačka u prostoru je obojena u 3 boje. Neka je P_i, $i = 1, 2, 3$ skup dužina duži AB pri čemu su tačke A i B obojene bojom i:

$$P_i = \{|AB| \mid \text{boja}(A) = \text{boja}(B) = i\}$$

Dokazati da bar jedan od skupova P_i sadrži sve nenegativne realne brojeve.

5. Tabla 7×7 popločana je pomoću 16 domina 1×3 i jednom 1×1. Na kojim sve pozicijama može da bude domina 1×1?

6. Dato je n tačaka u prostoru tako da je zapremina svakog tetraedra formiranog od datih tačaka manja ili jednaka 1. Dokazati da sve tačke leže unutar tetraedra zapremine 9.

7. Dato je 6 tačaka u ravni. Označimo sa M najveće a sa m najmanje rastojanje izmedju tih 6 tačaka. Dokazati da je $\frac{M}{m} \geq \sqrt{3}$.

8. **a)** Dokazati da u nizu od n različitih prirodnih brojeva, pri čemu je $n > (p-1)(q-1)$ postoji ili rastući podniz dužine p ili opadajući podniz dužine q.

b) Prirodni brojevi $1, 2, \ldots, 101$ zapisani su u nekom poretku. Dokazati da je moguće precrtati tačno 90 brojeva tako da brojevi koji ostanu formiraju ili rastući ili opadajući niz.

Definicija 1. Neka su $p, q \in \mathbb{N}$ dati prirodni brojevi. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da za svako bojenje ivica kompletnog grafa K_n u dve boje, plavu i crvenu, postoji ili *klika* (kompletan podgraf) od p čvorova čije su sve ivice plave ili klika od q čvorova čije su sve ivice crvene. Minimalan broj n koji zadovoljava ove uslove se naziva *Ramzejevim brojem* za p i q i označava se sa $\mathcal{R}(p, q)$.

Teorema 1. (Ramzejeva teorema) *Za svaka dva broja $p, q \in \mathbb{N}$ postoji Ramzejev broj $\mathcal{R}(p, q)$.*

9. Dokazati da za Ramzejeve brojeve važi:
a) $\mathcal{R}(p, q) \leq \mathcal{R}(p-1, q) + \mathcal{R}(p, q-1)$ **b)** $\mathcal{R}(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$

10. Dokazati da je: **a)** $\mathcal{R}(3, 3) = 6$, **b)** $\mathcal{R}(3, 6) = 18$

Teorema 2. Neka su $A_1, \dots, A_n$ podskupovi konačnog skupa S. Tada važi sledeća formula *uključivanja i isključivanja*:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

11. Neka je $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$, i $F \subset \mathbb{N}_n^{\mathbb{N}_n}$ skup svih funkcija koje nemaju nepokretnih tačaka tj.:

$$F = \{f \in \mathbb{N}_n^{\mathbb{N}_n} \mid f(x) \neq x,\ \forall x \in \mathbb{N}_n\}$$

Naći broj elemenata skupa F.

12. Označimo sa f_n broj permutacija π skupa $\mathbb{N}_n$ za koje važi $\pi_i \neq i$. Dokazati da je:

$$f_n = n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right).$$

13. Naći:

$$\sum_{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \max A.$$

14. Neka su k i n prirodni brojevi za koje važi $2k \le n+1$. Dokazati da važi identitet:

$$\sum_{i=1}^{k-1} 2^{k-i-1}\binom{k-1}{i}\binom{n+1-k}{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\binom{n-i}{k}$$

15. Dokazati da ima ne manje od $1 + \frac{(2n)!}{2}$ permutacija p skupa $\mathbb{N}_{2n}$ tako da za neko k, $1 \le k \le 2n-1$ važi: $|p_{k+1} - p_k| = n$.

16. Neka je dat kompletan graf K_{2n} i neka je G jedno savršeno sparivanje. Naći broj savršenih sparivanja G_1 grafa K_{2n} tako da je $G \cap G_1 = \emptyset$.

17. Na jednom takmičenju iz matematike, svaki od $2n$ učesnika posalje jedan zadatak komisiji. Komisija kad primi sve zadatke distribuira svakom učesniku po jedan. Rećićemo da je takmičenje *fer* ukoliko postoji n studenata koji su dobili zadatke od preostalih n studenata i obrnuto. Dokazati da je broj načina na koji komisija može da formira fer takmičenje potpun kvadrat.

18. Tačku u celobrojnoj koordinatnoj mreži nazvaćemo *reducibilnom* ako duž čiji su krajevi ta tačka i koordinatni početak sadrži još najmanje jednu tačku mreže. Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji kvadrat stranice n takav da su mu sve unutrašnje tačke reducibilne.

19. Data je permutacija $(a_1, \dots, a_n)$ brojeva iz skupa $\mathbb{N}_n$. Dozvoljeno je u jednom potezu zameniti mesta dva susedna bloka tj od permutacije:

$$a_1, \dots, a_i, \underbrace{a_{i+1}, \dots, a_{i+p}}_{A}, \underbrace{a_{i+p+1}, \dots, a_{i+q}}_{B}, a_{i+q+1}, \dots, a_n$$

zamenom dobijamo permutaciju:

$$a_1, \dots, a_i, \underbrace{a_{i+p+1}, \dots, a_{i+q}}_{B}, \underbrace{a_{i+1}, \dots, a_{i+p}}_{A}, a_{i+q+1}, \dots, a_n.$$

Naći minimalan broj zamena da se od permutacije $(n, n-1, \dots, 1)$ dobije $(1, 2, \dots, n)$.

20. Dokazati *Vandermodov konvolucioni identitet*:

$$\sum_{j=0}^{\min\{k,n-k\}} \binom{k}{j}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{k}.$$

UPUTSTVA I REŠENJA ZADATAKA

1. Posmatrati sumu $S = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k$ gde je a_k broj kuglica kod k-te osobe. U svakom potezu, ovaj broj ili ostaje isti ili se menja za $\pm n$. Znači da je $S \mod n$ invarijanta. Odavde se lako dobija da je za $n \in 2\mathbb{N}$ odgovor <u>NE</u>. Za $n \in 2\mathbb{N} + 1$ je odgovor <u>DA</u>!

2. Posmatrati obim figure koju obrazuju ćelije pod korovom. Ovaj broj se ne povećava.

3. Obojiti tablu u n boja na sledeći način:

1	2	3	...	n	1	...
1	2	3	...	n	1	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Svaka horizontalna domina pokriva po jedno polje u svakoj boji, dok vertikalne pokrivaju n polja u jednoj boji. Ako je h broj horizontalnih domina, onda je ukupan broj polja pokrivenih vertikalnim dominama u i-toj boji:

$$\begin{aligned} bq + b - h, &\quad i = 1, 2, \dots, r+1 \\ bq - h, &\quad i = r+2, \dots, n \end{aligned}$$

gde je $q = \lfloor \frac{a}{n} \rfloor$ a $r = a - qn$. Ukoliko je $r > 0$, pošto $n \mid b_i$ oduzimanjem prethodna dva izraza imamo da $n \mid b$. Ako je $r = 0$ onda $n \mid a$. Deo **b)** se slično rešava.

4. Pretpostavimo suprotno. Neka postoje realni brojevi $a_i \notin P_i$ i neka je, bez gubitka opštosti $a_1 \geq a_2 \geq a_3$. Neka je tačka A boje 1. Konstruišimo sferu sa centrom u A i poluprečnikom a_1. Tačke na njoj su boja 2 i 3. Uočimo sada tačku B na sferi koja je boje 2. Konstruišimo sferu sa centrom u B i poluprečnikom a_2 koja seče prvu sferu po kružnici boje 3 i poluprečnika $r = a_2\sqrt{1 - \frac{a_2^2}{4a_1^2}} \geq a_3$. Prema tome postoji duž na ovom krugu dužine $a_3 \leq r$. Kontradikcija.

5. Obojiti tablu na sledeći način:

0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0

Slika 4.1

0	1	2	**0**	1	2	**0**
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	**0**	1	2	**0**
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	**0**	1	2	**0**

Slika 4.2

Ukupno imamo 16 polja u bojama 1 i 2 i 17 polja u boji 0. Znači, domina 1×1 može da se nalazi samo na polju boje 0. Ako sada rotiramo popločanu tablu za 90^0, dobijamo ponovo korektno popločavanje table, pri čemu polje 1×1 mora da se nalazi ponovo na polju boje 0. Znači, jedine mogućnosti su

6. Uočiti tetraedar $ABCD$ maksimalne zapremine a zatim konstruisati ravni paralelne svakoj od strana koje prolaze kroz četvrto teme. Na taj način dobijamo tetraedar $A_1B_1C_1D_1$ čija je zapremina $V(A_1B_1C_1D_1) = 9V(ABCD) < 9$ i koji sadrži sve date tačke.

7. Konveksni omotač ovog skupa tačaka može da bude trougao, četvorougao, petougao ili šestougao. U sva četiri slučaja postoji trougao čiji je jedan ugao veći ili jednak 120^0. Odnos najveće i najmanje stranice ovog ťrougla je bar $\sqrt{3}$.

8. Označimo redom dužine najvećeg rastućeg podniza koji se završava i počinje brojem a_m sa L_m i R_m. Očigledno je $(L_m, R_m) \neq (L_p, R_p)$ ako je $m \neq p$. Sada tvrdjenje zadatka sledi na osnovu Diriheovog principa. Deo **b)** sledi direktno na osnovu dela **a)**

9. **a)** Neka je $n = \mathcal{R}(p, q-1) + \mathcal{R}(p-1, q)$. Uočimo proizvoljan kompletan graf sa n čvorova i proizvoljan čvor v. Neka iz čvora v polazi n_1 plavih i n_2 crvenih ivica. Pošto je $n = n_1 + n_2 + 1$ to je bar jedna od nejednakosti $n_1 \geq \mathcal{R}(p-1, q)$ i $n_2 \geq \mathcal{R}(p, q-1)$ tačna. Bez gubitka opštosti neka je $n_1 \geq \mathcal{R}(p-1, q)$. Uočimo sada n_1 suseda čvora v koji su sa v povezani plavim ivicama. Tada postoji ili crvena klika (čije su sve ivice crvene) veličine q ili plava veličine $p-1$. U drugom slučaju, dodavanjem čvora v dobijamo plavu kliku od p čvorova.

b) Na osnovu dela **a)** i svojstva binomnih koeficijenata sa desne strane.

11. Neka je A_i skup svih funkcija f takvih da je $f(i) = i$. Imamo da je $|A_i| = n^{n-1}$, $|A_i \cap A_j| = n^{n-2}$,... Prema tome, traženi broj je jednak:

$$n^n - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k} (-1)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} n^{n-k}$$

12. Na sličan način kao prethodni zadatak, samo što je u ovom slučaju $|A_i| = (n-1)!$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$,...

13. Skupova A za koje važi da je $\max A = k$ ima ukupno 2^{k-1}, pa je trazena vrednost jednaka:

$$S = \sum_{k=1}^{n} k 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} 2^{j-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(2^{n-k+1} - 1) = (n-1)2^n + 1$$

14. **I. Rešenje:** Posmatrati polinom $p(x) = (2+x)^{k-1}(1+x)^{n-(k-1)}$ i naći koeficijent uz x^i. Zatim polinom napisati u obliku $p(x) = (1 + (1+x))^{k-1}(1+x)^{n-(k-1)}$ i ponovo naći koeficijent uz x^i. Izjednačavanjem ta dva izraza dobija se identitet.

II. Rešenje: Formirati kombinatorni model datog problema. Neka je dato n kuglica, $k-1$ plavih i $n-(k-1)$ crvenih. Potrebno je rasporediti ih u 2 kutije, A i B, pri čemu u kutiju A idu samo plave a u kutiju B i plave i crvene kuglice pri čemu je u B tačno k kuglica. Ako prvo odaberemo i plavih kuglica za kutiju A na $\binom{k-1}{i}$ načina, a zatim od preostalih $n-i$ kuglica odaberemo k za kutiju B na $\binom{n-i}{k}$ načina, dobijamo da je ukupan broj načina da ovako rasporedimo kuglice jednak levoj strani identiteta. Ukoliko sada prvo odaberemo i plavih kuglica za kutiju B na $\binom{k-1}{i}$ načina a zatim isto za kutiju B preostalih $k-i$ crvenih na $\binom{n-(k-1)}{k-i}$ načina, preostaje nam još $k-i-1$ plavih kuglica. Svaka kuglica iz ove grupe može ili biti u A ili ni u A ni u B. Znači imamo 2^{k-i-1} mogućih rasporeda za ove kuglice. Na ovaj način smo dobili desnu stranu ovog identiteta.

15. **I. Rešenje:** Neka p_k i p_{k+1} zadovoljavaju uslov zadatka. Tada je $(p_k, p_{k+1}) = (j, n+j)$ ili je $(p_k, p_{k+1}) = (n+j, j)$ za neko $j = 1, \ldots, n$. Znači da su j i $n+j$ *susedni* u permutaciji p. Neka je A_j skup svih permutacija takvih da su j i $n+j$ susedni. Pošto su ova dva elementa susedna, možemo ih tretirati kao jedan, pa je $|A_j| = 2(2n-1)!$ (razlikujemo dva slučaja, kad je raspored $j, n+j$ i kad je $n+j, j$). Na sličan način je i $|A_j \cap A_k| = 2^2(2n-2)!$,... Primenom formule uključivanja i isključivanja dobijamo:

$$D = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^k (2n-k)! = (2n)! - \frac{(2n)!}{2n-1}(n-1) + ... > \frac{(2n)!}{2}$$

jer se direktno izračunavanjem zbira dva susedna elementa proverava da je ostatak sume pozitivan.

II. Rešenje:[1] Neka je A skup permutacija za koje važi uslov zadatka a B skup onih za koje ne važi. Konstruisaćemo $1-1$ funkciju $f : B \to A$ i time ćemo pokazati da je $|A| > |B|$ odakle sledi

[1] Na rešenje ukazao Aleksandar Trokicić

uslov zadatka. Neka je $(p_1, \ldots, p_{2n})$ permutacija za koju ne važi uslov zadatka. Brojeve j i $n+j$ (koji zadovoljavaju uslov $|x-y| = n$) nazvaćemo *braća*. Neka je p_j *brat* broja p_1. Na osnovu pretpostavke je $j \neq 2$. Neka je:

$$f(p_1, \ldots, p_n) = (p_2, \ldots, p_j, p_1, p_{j+1}, \ldots, p_{2n})$$

Ovim je očigledno definisana $1-1$ funkcija koja nije *na*, pa prema tome važi da je $|A| > |B|$.

16. Neka je M_n broj savršenih sparivanja grafa K_{2n}. Prvu ivicu savršenog sparivanja biramo na $\binom{2n}{2}$ načina, drugu na $\binom{2n-2}{2}$ načina, itd. Pošto redosled ivica nije bitan, proizvod moramo podeliti sa $n!$. Ovim dobijamo da je:

$$M_n = \frac{1}{n!}\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Neka je sad $G = \{J_1, \ldots, J_n\}$ dato savršeno sparivanje. Neka je A_i skup svih savršenih sparivanja G' koja imaju zajedničku ivicu J_i. Ukoliko posmatramo $G' \setminus \{J_i\}$, onda je to savršeno sparivanje grafa K_{2n-2}. Znači $|A_i| = M_{n-1}$. Na sličan način dobijamo da je $|A_i \cap A_j| = M_{n-2}$,... Na osnovu formule uključivanja i isključivanja sada je traženi broj:

$$M_n - |A_1 \cap \ldots \cap A_n| = M_n - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}M_{n-k} = \sum_{k=0}(-1)^k\binom{n}{k}M_{n-k}.$$

17. Svakom dodeljivanju zadataka odgovara jedna permutacija p skupa $\mathbb{N}_{2n}$. Rastavimo permutaciju p u *ciklove* [2] $\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_k$. Očigledno, ako je dodeljivanje fer, svaki cikl je parne dužine, i obrnuto, ako su svi ciklovi parne dužine, permutacija predstavlja fer dodeljivanje. Neka je $E(n)$ traženi broj. Neka najveći element permutacije $2n$ pripada prvom ciklu. Neka je $|\sigma_1| = 2j$, preostalih $2j-1$ elemenata možemo odabrati na $\binom{2n-1}{2j-1}$ i od njih napraviti $(2j-1)!$ cikličnih permutacija. Sve skupa, prvi cikl biramo na $\binom{2n-1}{2j-1}(2j-1)!$ načina. Preostale ciklove biramo na $E(n-j)$ načina. Znači:

$$E(n) = \sum_{j=1}^{n}\binom{2n-1}{2j-1}(2j-1)!E(n-j)$$

Sredjivanjem dobijamo:

$$2n\frac{E(n)}{(2n)!} = \sum_{j=1}^{n}\frac{E(n-j)}{(2n-2j)!} = (2n-2)\frac{E(n-1)}{(2n-2)!} + \frac{E(n-1)}{(2n-2)!} = (2n-1)\frac{E(n-1)}{(2n-2)!}$$

Odavde se lako (npr. indukcijom) dokazuje da je $E(n) = (2n-1)!!^2$

18. Neka su p_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ različiti prosti brojevi. Neka je $c_j = \prod_{i=1}^n p_{ij}$ a $r_i = \prod_{j=1}^n p_{ij}$. Pronadjimo brojeve a i b tako da važe sledeće kongruencije $a + i \equiv_{r_i} 0$ i $b + j \equiv_{c_j} 0$. Ovi brojevi postoje na osnovu Kineske teoreme o ostacima i pošto su r_i i r_j, odnosno c_i i c_j uzajamno prosti brojevi za $i \neq j$. Posmatrajmo sad kvadrat čiji je donji levi ugao $(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2})$. Nije teško proveriti da upravo ovaj kvadrat zadovoljava uslove zadatka.

19. Nazovimo operaciju zamene blokova u permutaciji potezom. Neka je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ trenutna permutacija (dobijena posle nekoliko poteza). Neka je $S(a)$ broj parova (a_i, a_{i+1}) takvih da važi $a_i < a_{i+1}$. Dokazaćemo da se u svakom potezu ovaj broj menja najviše za 2. Posmatrajmo potez u kome blokove $a, \ldots, b$ i $c, \ldots, d$ menjamo u permutaciji:

$$\ldots, p, \underbrace{a, \ldots, b}_{A}, \underbrace{c \ldots, d}_{B}, q, \ldots$$

[2]Za detaljnije upoznavanje sa pojmom razbijanja permutacije na ciklove pogledati knjigu P. Mladenovića, *Kombinatorika* ili knjigu Ž. Perovića, *Algebra 1*

Posle zamene dobijamo sledeću permutaciju:

$$\ldots, p, \underbrace{c\ldots, d}_{B}, \underbrace{a, \ldots, b}_{A}, q, \ldots$$

Pretpostavimo suprotno, da je npr. pre zamene važilo $p < a$, $b < c$ i $d < q$ a da posle zamene važi: $p > c$, $d > a$ i $b > q$. Sabiranjem prvih tri nejednakosti dobijamo da važi $p + b + d < a + c + q$, a sabiranjem drugih tri $p + d + b > c + a + q$ što je kontradikcija.

Znači, S može da se menja za najviše 2. Na početku je $S = n - 1$ a na kraju je $S = 0$. U prvom i poslednjem potezu, S se menja za tačno 1, pa ako je x broj poteza mora da važi $2+2(x-1) \geq n-1$, odnosno $x \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Konstruišimo sada niz od $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ poteza koji nas dovodi do rešenja. Neka je $n = 2k$. U prvom potezu zamenimo blokove $a_n, \ldots, a_{n-k+1}$ i a_{n-k}, a_{n-k-1} (zadnjih $k - 1$ i narednih 2 od pozadi). Zatim $a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}$ i a_{n-k-1}, a_{n-k-2}, itd. (u i-tom potezu menjamo $k - 1$ poslednjih elemenata počev od $n-i+1$-vog i naredna dva elementa). Posle k poteza dobijamo permutaciju $k, \ldots, 1, 2k, \ldots, k+1$. U zadnjem potezu samo zamenimo blokove $2k, \ldots, k + 1$ i $k, \ldots, 1$ i dobijamo traženu permutaciju. Ukoliko je $n = 2k + 1$, poteze izvodimo na isti način, samo što su sada blokovi dužine k. Posle k poteza dobijamo permutaciju $2k + 1, k, \ldots, 1, 2k, \ldots, k + 1$. Sada menjamo blokove $k, \ldots, 1$ i $2k, \ldots, k + 1$ i dobijamo traženu permutaciju.

20. Najpre usvojimo da je $\binom{n}{k} = 0$ ukoliko je $n < k$. Ako uvedemo smenu $i = k - j$ i gornju granicu u sumi pomerimo na k, dobijamo da je leva strana jednaka:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{n-k}{j} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{k-i}\binom{n-k}{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}$$

Dokažimo da je poslednja suma upravo jednaka $\binom{n}{k}$ formiranjem kombinatornog modela.

Neka je dato n kuglica, k plavih i $n - k$ crvenih. Od tih n kuglica biramo k kuglica nezavisno od boje. Trivijalno, to možemo učiniti na $\binom{n}{k}$ načina. Medjutim, ukoliko prvo odaberem i plavih kuglica na $\binom{k}{i}$ načina, a zatim $k - i$ crvenih na $\binom{n-k}{k-i}$ načina, dobijamo da je ukupan broj načina upravo jednak $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}$. Time je dokaz završen.

Napomena. Najčešće se kod ovakvih identiteta u kojima figurišu binomni koeficijenti usvaja da je $\binom{n}{k} = 0$ ukoliko je $n < k$. Tada, u principu o granicama u odgovarajućim sumama ne moramo voditi računa. Tako bi, npr. Vandermodov identitet iskazali na sledeći način:

$$\sum_{j} \binom{k}{j}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{k}$$

Naravno, uvek treba biti oprezan jer u nekim slučajevima ovakav pristup može da dovede do netačnih rezultata.

Za sve primedbe, komentare, sugestije, itd. u vezi zadataka (a i uopšte) možete me kontaktirati putem e-maila.

© Marko Petković
dexterofnis@gmail.com