

JOŠ MALO KOMBINATORIKE

predavač: *Marko Petković*

1. Naći koliko ima nizova $a_1 a_2 \dots a_{2n}$ tako da je $a_i = \pm 1$ i da je:

$$\left| \sum_{i=2k-1}^{2l} a_i \right| \leq 2$$

gdje su k, l prirodni brojevi i $1 \leq k, l \leq n$.

2. Prirodni brojevi $1, \dots, n$ su upisani u polja table $9 \times n$, svaki tačno 9 puta. Takođe, apsolutna vrednost razlike bilo koja dva broja u jednoj koloni table je manja ili jednaka 3. Neka je S jednak:

$$S = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^9 a_{ij}$$

Naći maksimalnu moguću vrednost broja S .

3. Na krugu je raspoređeno n tačaka, A_1, \dots, A_n koje formiraju pravilan n -ougao. Naći permutaciju ovih tačaka B_1, \dots, B_n tako da je ukupna dužina luka $B_1 B_2 \dots B_n$ maksimalna.
4. Posmatrajmo sve pravougaonike čija su temena tačke sa celobrojnim koordinatama u ravni, ivice paralelne koordinatnim osama i površina jednaka 2^k , za proizvoljno $k = 1, 2, \dots$. Dokazati da se tabla može obojiti u dve boje, plavu i crvenu, tako da nijedan posmatrani pravougaonik nema sva 4 temena iste boje.
5. Neka je S konačan skup tačaka u ravni sa svojstvom da za svake tri tačke A, B i C važi da ortocentar H trougla $\triangle ABC$ pripada S . Dokazati da S sadrži tačno 4 tačke.
6. Neka je $f(n)$ broj izbora znakova $+$ i $-$ tako da izraz $E = \pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n$ ima vrednost nula. Dokazati:

a) $f(n) = 0$ za $n \equiv_4 1, 2$

b) Za $n \equiv_4 0, 3$ važi:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^n \leq f(n) < 2^n - 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$$

7. Na jednoj međunarodnoj konferenciji 4 jezika su zvanična. Poznato je da svaka dva učesnika mogu da se sporazumevaju na bar jednom od 4 zvanična jezika (postoji jezik koji obojica znaju). Dokazati da postoji jedan jezik koga zna bar 60% učesnika.
8. Za kvadratnu tablu dimenzija $n \times n$ kažemo da predstavlja *magični kvadrat* ukoliko je zbir elemenata u svakoj vrsti i koloni isti i jednak m . Dokazati da je broj magičnih kvadrata dimenzija 3×3 i sume m takvih da je minimalni element u centru jednak $\binom{m+4}{4}$.

Za sve primedbe, komentare, sugestije, itd. u vezi zadataka (a i uopšte) možete me kontaktirati putem e-maila.