Mehanika, kinematika i elastičnost

Marko Petković

Sreda, 29. Mart 2006. god.

1 Osnovne relacije

1. Drugi Njutnov zakon: $m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}$; $m\vec{a'} = \vec{F} + m\omega^2\vec{R} + 2m(\vec{v'} \times \vec{\omega})$

2. Priraštaj impulsa sistema: $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}\Delta t$ (ako je $\vec{F}$ konstantna ili Δt malo).

3. Moment impulsa, moment sile: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

4. Priraštaj momenta impulsa sistema: $\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{r}_c \times \vec{p}$.

5. Hukov zakon elastičnosti: $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$

2 Zadaci

1. **(I.1.63)** Na strmu ravan nagibnog ugla α postavljena su dva tela, jedno do drugog. Mase tela su m_1 i m_2, a koeficijenti trenja tela o podlogu su redom μ_1 i μ_2. Naći:

   a) Silu interakcije izmedju tela tokom kretanja,
   b) Uslov pri kome će tela ostati spojena tokom kretanja,
   c) Vrednosti ugla α pri kojima neće biti kretanja.

2. **(I.1.57)** Kupa sa uglom otvora 2α i poluprečnikom osnove R kotrlja se uniformno bez klizanja po horiznontalnoj podlozi. Vrh kupe je uzgloblјen u tački O koja se nalazi na istom nivou sa tačkom C, centrom osnove kupe. Brzina tačke C je v. Naći:
   a) Vektor ugaone brzine kupe,
   b) Vektor ugaonog ubrzanja kupe.

3. N samonavodećih raketa nalazi se u temenima pravilnog N-tougla stranice a. Svim raketama se istovremeno zada da krećuci se brzinom v stalno ide u pravcu prema njoj susednoj raketi (u counterclockwise smeru). Kada će doći do sudara?

4. Merdevine dužine $2r$ naslonjene su jednim krajem na pod a drugim na vertikalni zid, tako da je ugao izmedju njih i poda α_0. Ove merdevine počinju da klize bez početne brzine, pri čemu donji kraj klizi po podu a gornji po zidu. U toku kretanja merdevine ostaju u vertikalnoj ravni, a trenje sa zidom i podom se može zanemariti.
   a) Naći ubrzanje centra mase merdevina.
   b)* Naći vreme padanja merdevina.

5. **(I.1.127)** Na jednakim platformama 1 i 2 nalazi se po jedan čovek. Platforme se kreću po inerciji bez trenja po paralelnim šinama, jedna drugoj u susret. Kada su se platforme poravnale oba čoveka su preskakanjem u pravcu normalnom na pravac šina, promenili mesta na platformama. Zbog toga se platforma 1 zaustavila a brzina platforme 2 postala v. Nači prvobitne brzine v_1 i v_2 platformi ako je masa svake od platformi (bez čoveka) M i svakog čoveka m.

6. Dve elastične glatke kuglice istovremeno izleću iz temena A i B jednakostraničnog trougla. Njihove brzine su jednake po intenzitetu i usmerene su ka tački C. Masa kuglice A je 3 puta veća od mase kuglice B a radijusi su im jednaki. Koliki će biti ugao izmedju brzina kuglica posle sudara?

7. Dve elastične glatke kuglice poluprečnika r kreću se jedna drugoj u susret po paralelnim pravcima tako da je najviša tačka prve kuglice na istoj visini kao centar druge. Brzina prve kuglice je 2 puta veća od brzine druge. Naći ugao izmedju brzina kuglica posle sudara.

8. Dva identična tela u obliku krsta stranice l na čijim krajevima su kuglice mase m kreću se jedan drugom u susret. Naći:
a) Ukupan moment impulsa sistema u odnosu na proizvoljnu tačku C.
b) Brzinu i ugaonu brzinu oba krsta posle sudara.

9. Kuglica mase m i brzine v se sudara sa istom takvom kuglicom koja je pre sudara mirovala. Ugao izmedju pravca kretanja prve kuglice i pravca koji u trenutku sudara spaja njihove centre je α. Ako su kuglice glatke, naći koji deo kinetičke energije upadne kuglice je prešao u potencijalnu energiju deformacije u trenutku kad je deformacija maksimalna.

10. Štap mase M i dužine l je okačen jednim svojim krajem o plafon. U početnom trenutku štap se drži u horizontalnom položaju, a zatim se pusti. U trenutku kad štap dodje u vertikalni položaj, svojim drugim krajem se elastično sudari sa telom mase m koje je pre sudara mirovalo na horizontalnoj podlozi. Odrediti potencijalnu energiju deformacije tela u trenutku njihove najveće deformacije.

11. **(I.1.314)** Horizontalno postavljeni štap dužine l rotira oko vertikalne ose koja prolazi kroz njegovu sredinu ugaonom brzinom ω.
a) Naći ukupno izduženje štapa.
b) Ako je maksimalna sila zatezanja koju štap može da izdrži F_{max}, naći maksimalnu ugaonu brzinu rotacije tako da se štap ne pokida.
Površina poprečnog preseka štapa je S a Jungov modul elastičnosti E.

12. **(I.1.315)** Prsten radijusa r, napravljen od olovne žice rotira oko vertikalne nepokretne ose koja prolazi kroz njegov centar ugaonom brzinom ω. Naći: **a)** Naći ukupno izduženje štapa.
b) Ako je maksimalna sila zatezanja koju přsten može da izdrži F_{max}, naći maksimalnu ugaonu brzinu rotacije tako da se přsten ne pokida.
Površina poprečnog preseka štapa je S a Jungov modul elastičnosti E.

13. **(Okruzno 2006. 3. raz.)** Telo mase M klizi niz strmu ravan nagibnog ugla α. Kada telo predje put l, u njega udara kuglica mase m, koja leti ka telu u horizontalnom pravcu. Koliku brzinu treba da ima kuglica da bi se posle apsolutno neelastičnog sudara telo zaustavilo? Pretpostavlja se da je vreme trajanja sudara malo.

14. Posmatrajmo isti sistem kao u prethodnom zadatku, pri čemu je sad vreme sudara izmedju tela i kuglice konačno i iznosi t_s. Kolika je sad potrebna brzina da bi se telo zaustavilo?

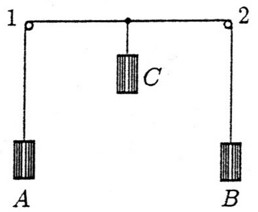
15. **(Opšta grupa, 1997. godina)** Lopta se nalazi na nekoj visini od hrapave horizontalne podloge. Kako treba baciti loptu da bi ona išla tamo-amo istom trajektorijom? Sudar lopte je elastičan i nema klizanja u tački kontakta.

16. **(I.1.119)** Preko kotura je prebačen konopac na čijem jednom kraju vise merdevine sa čovekom a na drugom uravnotežavajući teg mase M. Čovek mase m pomerio se za l' naviše u odnosu na merdevine i zaustavio se. Zanemarujući mase konopca i kotura kao i trenje u osovini kotura, naći:
a) Pomeraj centra mase l tog sistema.
b) Pomeraj tega.

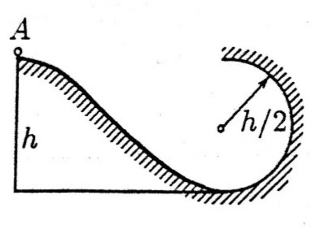
17. (I.1.167) Čestica mase m kreće se brzinom v_1 pod uglom α_1 u odnosu na normalu na ravan koja razdvaja oblasti u kojima su potencijalne energije čestice U_1 i U_2. Pod kojim uglom α_2 će se, u odnosu na normalu, kretati čestica posle prolaska kroz tu ravan? Pri kom uslovu čestica ne može preći u oblast sa potencijalnom energijom U_2?

18. (I.1.168) Nit je prebačena preko horizontalnih glatkih štapova 1 i 2. Na krajevima i o sredinu niti okačeni su tereti jednakih masa A, B i C. Rastojanje izmedju štapova je l. U jednom trenutku teret C je pažljivo pišten i sistem se počeo kretati. Naći brzinu tereta C u trenutku kada je kinetička energija sistema maksimalna i maksimalno pomeranje tereta C prilikom kretanja nadole.

19. (I.1.160) Malo telo A sklizne sa visine H po nagnutom žljebu koji prelazi u polukrug radijusa $\frac{h}{2}$. Naći brzinu tela u najvišoj tački njegove putanje (posle odvajanja od žljeba). Trenje se zanemaruje.



Zad. 18.



Zad. 19.

3 Rešenja nekih zadataka

13. i 14. Za vreme trajanja sudara kuglica deluje na telo (a i telo na kuglicu, prema 3. Njutnovom zakonu) silom F u horizontalnom pravcu. Takodje, na telo deluje i sila otpora podloge N normalno na površinu strme ravni. Pretpostavićemo da je sila F konstantna tokom celog sudara (to u opstem slučaju nije tako, ali cak i tada se može uzeti vrednost srednje sile tokom celog sudara). Iz drugog Njutnovog zakona za telo imamo:

$$Ma = Mg\sin\alpha - F\cos\alpha \tag{1}$$

a za kuglicu:

$$ma_k = -F \tag{2}$$

Ako sad jednačinu (1) pomnožimo sa Δt i iskoristimo da je $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$ (pošto su sve sile **konstantne** tokom celog sudara, onda su takva i ubrzanja pa možemo uzeti da je Δt "veliko") imamo:

$$M\Delta v = Mg\sin\alpha\Delta t - F\cos\alpha\Delta t \tag{3}$$

A kad isto to uradimo sa (2) imamo:

$$m\Delta v_k = -F\Delta t \tag{4}$$

Kad sad zamenimo $F\Delta t$ iz (4) u (3) imamo:

$$M\Delta v = Mg\sin\alpha\Delta t + m\Delta v_k\cos\alpha \tag{5}$$

Ako sad stavimo da je $\Delta t = t_s$, $\Delta v = v_0 - 0 = v_0$ i $\Delta v_k = v - 0 = v$ i zamenimo u 5 dobijamo:

$$Mv_0 = Mg\sin\alpha t_s + mv\cos\alpha \tag{6}$$

odnosno:

$$v_0 = g\sin\alpha t_s + \frac{m}{M}v\cos\alpha \tag{7}$$

Ako je t_s malo, onda je član $g \sin\alpha t_s$ zanemarljiv pa je $v_0 = \frac{m}{M} v \cos\alpha$.

U zvaničnom rešenju sa takmičenja stoji da je sistem telo-kuglica u horizontalnom pravcu izolovan i da ne deluje nijedna spoljna sila. Očigledno, pritom je zaboravljena sila otpora podloge N. Kad napišemo drugi Njutnov zakon u horizontalnom pravcu imamo:

$$Ma_x = N \sin\alpha - F \tag{8}$$

Kad pomnožimo ovu relaciju sa Δt i radimo slično kao u prethodnom slučaju imamo:

$$Mv_{0x} = N \sin\alpha \Delta t - F\Delta t = N \sin\alpha t_s + mv \tag{9}$$

Kad sad uzmemo da $t_s \to 0$ **NE** dobijamo da $N \sin\alpha t_s \to 0$ jer je $N = \sqrt{(Mg)^2 + F^2}$, pa ako $t_s \to 0$, onda $F = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{v}{t_s} \to +\infty$ pa i $N \to +\infty$. Kad se izračuna dobije se da $Nt_s \to const \neq 0$!

16. a) Neka je pomeraj tega nagore (merdevina nadole) jednak l_1. Sada je ukupan pomeraj čoveka u odnosu na početni položaj $l' - l_1$. Pošto je sistem u ravnoteži, imamo da je masa merdevina: $m_m = M - m$. Ukupan pomeraj centra mase sistema po y osi jednak je:

$$l = \frac{m(l' - l_1) - (M - m)l_1 + Ml_1}{2M} = \frac{ml'}{2M} \tag{1}$$

b) Napišimo drugi Njutnov zakon redom za čoveka, merdevine i teg:

$$ma_{cv} = N - mg, \quad (M - m)a = (M - m)g + N - F_z, \quad Ma = F - Mg \tag{2}$$

gde je N sila kojom čovek deluje na merdevine tokom kretanja a F_z sila zatezanja konopca. Ako sada eliminišemo F_z i N dobijamo:

$$(M - m)a = (M - m)g + mg + ma_{cv} - M(a + g) = ma_{cv} - Ma \tag{3}$$

odnosno imamo da je $(2M - m)a = ma_{cv}$. Napomenimo da je a_{cv} ubrzanje čoveka u odnosu na kotur (ne u odnosu na merdevine). U neinercijalnom referentnom sistemu vezanom za merdevine je $a_{cvm} = a_{cv} + a$ pa zamenom dobijamo $2Ma = ma_{cvm}$ odnosno:

$$a = \frac{m}{2M} a_{cvm} \tag{4}$$

Primetimo da ubrzanja a_{cvm} i a nisu konstantna tokom kretanja (na kraju kretanja i čovek i merdevine ponovo miruju). Ako prethodni izraz pomnožimo sa malim Δt dobićemo:

$$\Delta v = \frac{m}{2M} \Delta v_{cvm} \tag{5}$$

Podelimo sada vremenski interval (t_s, t) (gde je t_s trenutak početka kretanja) na n malih delova dužina $\Delta t_i = \Delta t$. Za svaki delić važi relacija (5). Ako sve te relacije sumiramo dobičemo da je:

$$(v - v_s) = \frac{m}{2M}(v_{cvm} - v_{cvm_s}) \tag{6}$$

Pošto je brzina čoveka u odnosu na merdevine na pocetku kretanja jednaka nuli $v_{cvm_s} = 0$, kao i brzina merdevina (odnosno tega) $v_s = 0$, na osnovu prethodne formule zaključujemo da je:

$$v = \frac{m}{2M} v_{cvm} \tag{7}$$

Analogno, još jednim deljenjem itervala (t_s, t) na n delova i sumiranjem dobijamo da je:

$$l_1 = \frac{m}{2M} l' \tag{8}$$

Primetimo na kraju da je $l = l_1$.

17. Na osnovu zakona održanja energije imamo da je:

$$\frac{mv_1^2}{2} + U_1 = \frac{mv_2^2}{2} + U_2 \tag{1}$$

Prilikom prelaza izmedju dve oblasti, na telo deluje sila normalna na ravan koja ih razdvaja (pošto se duž te ravni potencijalna energija ne menja). Zbog toga, komponenta brzine paralelna ravni ostaje nepromenjena, odnosno važi:

$$v_1 \sin\alpha_1 = v_2 \sin\alpha_2 \tag{2}$$

Iz ova dva izraza, eliminacijom v_2 dobijamo:

$$\frac{mv_1^2}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_2} - 1\right) = U_1 - U_2$$

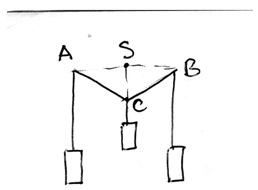
Rešavanjem po α_2 dobijamo:

$$\sin^2\alpha_2 = \frac{\sin^2\alpha_1}{1 + \frac{2(U_1-U_2)}{mv_1^2}} \tag{3}$$

Ili ekvivalentno:

$$\tan\alpha_2 = \frac{v_1\sin\alpha_1}{\sqrt{\cos^2\alpha_1 + \frac{2(U_1-U_2)}{m}}} \tag{4}$$

18. Teret C će se kretati vertikalno naniže dok će se tereti A i B kretati vertikalno naviše. Označimo $SC = y$, $AC = x$, $\alpha = \angle ACS$.



Zad. 18.

Imamo da je $x = \sqrt{y^2 + \frac{l^2}{4}}$. Neka je F_z sila zatezanja konca AC i BC (zbog simetrije, te dve sile su jednake). Drugi Njutnov zakon za telo C glasi:

$$ma_C = mg - 2F_z\cos\alpha \tag{1}$$

Sve dok je $a_C \geq 0$, teret C će se ubrzavati, a sa njim i A i B. Nije teško videti da će sistem oscilovati oko ravnotežnog položaja koji je odredjen uslovom $a_C = 0$. Tada će kinetička energija sistema tela biti maksimalna. Iz zakona održanja energije imamo:

$$2\frac{mv_A^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2} = mg(l + y - 2x) \tag{2}$$

Uslov $a_C = 0$ ekvivalentan je sa $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ pa je $y = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ i $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$. Dalje je:

$$v_A = \frac{dx}{dt} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + \frac{l^2}{4}}}\frac{dy}{dt} = \frac{y}{x}v_C = \frac{1}{2}v_C$$

Zamenom dobijamo da je:

$$\frac{3mv_C^2}{4} = mg(l + y - 2x) = mgl\frac{2-\sqrt{3}}{2} \tag{3}$$

Odnosno:

$$v_C = \sqrt{\frac{2gl(2-\sqrt{3})}{3}}$$

Posmatrajmo trenutak kad teret C dostigne najnižu tačku. Tada je $v_C = v_A = 0$. Iz (2) imamo:

$$l + y - 2x = l + y - \sqrt{l^2 + 4y^2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2l}{3}$$