# Kompleksni brojevi i primena u geometriji

**Marko Petković**

Subota, 3. Decembar 2005. god.

## 1 Osnovni pojmovi i tvrdjenja:

1. Skup kompleksnih brojeva: $\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$, $i^2 = -1$
2. Oblici kompleksnog broja:
   (a) Algebarski: $z = x + iy$, $x = Re\, z$, $y = Im\, z$
   (b) Trigonometrijski: $z = \rho\,(cos\phi + i\,sin\phi)$, $|z| = \rho$, $arg\, z = \phi$.
   (c) Eksponencijalni: $z = \rho e^{i\phi}$
3. Moduo kompleksnog broja: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x + iy$.
4. Konjugovano-kompleksni broj: $\overline{z} = x - iy$, $z = x + iy$.
5. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
6. $(cos\phi_1 + i\,sin\phi_1)\,(cos\phi_2 + i\,sin\phi_2) = (cos(\phi_1 + \phi_2) + i\,sin(\phi_1 + \phi_2))$

## 2 Zadaci

1. Odrediti skup tačaka u kompleksnoj ravni koje zadovoljavaju sledece uslove:
   a) $2 < |z| < 3$, $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/3$  b) $|z| \geq 1$, $\pi/6 \leq \phi \leq \pi/3$
   c) $|z - z_0| < 1$  e) $|z| + Re\, z \leq 2$
2. Ako je su $a, b, c \in \mathbb{C}$ i $|a| = |b| = |c| = r$ dokazati da je $|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}| = r$.
3. Ako je $|z| < 1/2$ dokazati da je $|(1 + i)z^3 + iz| < 3/4$.
4. Dokazati da za svaka dva kompleksna broja važi: $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2\left(|x|^2 + |y|^2\right)$.
5. Pokazati da je $\frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ realan broj ako je $|z_1| = |z_2| = 1$.
6. a) Dokazati da su tačke $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ temena jednakostraničnog trougla akko je $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$.
   b) Koreni jednačine $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ obrazuju jednakostranični trougao akko je $a^2 = 2b$
7. Dokazati da su tačke $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ temena kvadrata akko je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(ac + bd)$
8. Dokazati da polinom $P(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ ima četiri kompleksne nule po modulu jednake 1.
9. Dokazati da za svako $a, b, c \in \mathbb{C}$ važi:
   a) $|a + b|^2 + |b + c|^2 + |c + a|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |a + b + c|^2$

b) (Hlawkina nejednakost) $|a+b|+|b+c|+|c+a| \geq |a|+|b|+|c|+|a+b+c|$

c) (Generalizacija) Dokazati da za svako $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ važi:

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n}|z_i| + |\sum_{i=1}^{n} z_i| \geq \sum_{i<j}|z_i+z_j|$$

**Lema 1.** *(Hlawka) Neka su $A_1, \ldots, A_n$ i $B_1, \ldots, B_n$ tačke u ravni. Označimo sa $A_i'$ i $B_i'$ projekcije tačaka $A_i$ i $B_i$ na pravu $p$. Ako za svaku pravu $p$ koja prolazi kroz koordinatni početak važi $\sum_{i=1}^{n} OA_i' \geq \sum_{i=1}^{n} OB_i'$ onda je $\sum_{i=1}^{n} OA_i \geq \sum_{i=1}^{n} OB_i$.*

10. Neka je $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ gde su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tako da je $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$. Dokazati da je $|P(z)| > \sqrt{6}$ bar za jedno $z \in \mathbb{C}$ tako da je $|z| = 1$.

**Definicija 1.** $V(a,b,c) = \frac{a-c}{b-c}$, $W(a,b,c,d) = \frac{V(a,b,c)}{V(a,b,d)}$.

**Teorema 1.** *Trouglovi abc i $a'b'c'$ su slicni akko je $V(a,b,c) = V(a',b',c')$.*

**Teorema 2.** *Tačke a, b i c su kolinearne akko je $V(a,b,c) \in \mathbb{R}$.*

**Teorema 3.** *Tačke a, b, c i d pripadaju jednom krugu ili jednoj pravoj akko je $W(a,b,c,d) \in \mathbb{R}$.*

11. Neka su $\triangle ABX$, $\triangle BCY$, $\triangle CAZ$ slični i istosmerni trouglovi. Dokazati da se težista trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle XYZ$ poklapaju.

12. Nad stranicama trougla $\triangle ABC$ konstruisani su slični jednakokraki trouglovi $ABP$ ($AP = PB$), $ACQ$ ($AQ = CQ$) i $BCR$ ($BR = CR$) tako da su prva dva izvan trougla $\triangle ABC$ dok je $R$ u istoj poluravni odredjenoj sa $BC$ kao i $A$. Dokazati da je četvorougao $APRQ$ paralelogram.

13. Neka u konveksnom četvorouglu važi $AC = BD$. Izvan četvorougla nad svakom stranicom konstruisani su jednakostranični trouglovi. Ukoliko sa $P$, $Q$, $R$ i $S$ obeležimo centre tih trouglova koji odgovaraju redom stranicama $AB$, $BC$, $CD$ i $DA$, dokazati da su prave $PR$ i $QS$ normalne.

14. Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ i neka važi $\frac{a-b}{c-b} \cdot \frac{c-d}{a-d} \in \mathbb{R}$. Tada je i $\frac{a-b}{d-b} \cdot \frac{d-c}{a-c} \in \mathbb{R}$.

15. Neka su $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$ slicni i istosmerni trouglovi, a $A$, $B$ i $C$ tačke koje dele duži $A_1A_2$, $B_1B_2$ i $C_1C_2$ u istom odnosu. Dokazati da je $\triangle ABC$ slican i istosmeran sa prva dva.

16. Dat je četvorougao $ABCD$. Dokazati da važi $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA$, pri cemu jednakost važi akko je četvorougao tetivan.

17. Dat je šestougao $ABCDEF$ upisan u krug poluprečnika $r$. Ako je $AB = CD = EF = r$ dokazati da središta stranica $BC$, $DE$ i $FA$ formiraju jednakostranični trougao.

18. (Ojlerov krug trougla) Dokazati da središta stranica, podnožja visina i središta duži koje spajaju ortocentar sa centrom opisanog kruga a poluprečnik je jednak polovini poluprečnika opisanog kruga tog trougla.

19. Nad stranicama trougla $\triangle ABC$ konstruisani su u njegovoj spoljašnjosti kvadrati $BCDE$, $CAFG$ i $ABHI$. Neka su $GCDQ$, i $EBHP$ paralelogrami. Dokazati da je $\triangle APQ$ jednakokrako-pravougli trougao.

20. Dat je trougao $\triangle ABC$ takav da je $\alpha = 20^o$, $\beta = \gamma = 80^o$. Neka su $K$ i $L$ tačke koje leže na stranicama $AB$ i $AC$ takve da je $\angle KCB = 30^o$ i $\angle LBC = 60^o$. Odrediti $\angle BLK$.