Funkcionalne jednačine

Marko Petković
gimnazija Svetozar Marković, Niš

Subota, 10.12.2005

1. Neka je $\mathbb{N}_n^0 = \{0, \ldots, n\}$. Koliko ima funkcija $f : \mathbb{N}_n^0 \to \mathbb{N}_n^0$ za koje važi:

   (1) $i \neq j \Rightarrow f(i) \neq f(j)$
   (2) $i + j = n \Rightarrow f(i) + f(j) = n$

2. Neka je $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$. Koliko ima funkcija $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ za koje važi $f(f(x)) = x$ za svako $x \in \mathbb{N}_n$?

3. Neka je $n \geq 3$ i $\mathcal{F}_n$ familija funkcija $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ za koje važi:

   (1) $f(k) \leq f(k+1)$, za $k = 1, \ldots, n-1$;
   (2) $f(k) = f(f(k+1))$, za $k = 1, \ldots, n-1$;

   Koliko elemenata ima familija $\mathcal{F}_n$?

4. Naći sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da je $f(f(m) + f(n)) = m + n$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$. Ako je $f(1) = 1$ naći $f(2005)$.

5. Naći sve funkcije $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ za koje važi $f(n+m) + f(n-m) = f(3n)$, za sve $n, m \in \mathbb{N}_0$ i $n \geq m$.

6. Dokazati da ne postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ takva da je $f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n)$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

7. Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ zadovoljava relaciju

   $$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$$

   za sve $m, n \in \mathbb{N}_0$ za koje je $m \geq n$. Ako je $a_1 = 3$ naći a_n.

8. Neka je $\mathcal{B}_n \subset \{0,1\}^n$ i $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Definišimo operaciju $\oplus$ na $\mathcal{B}_n$ na sledeći način $a \oplus b = ((a_1 + b_1) \; mod \; 2, \ldots, (a_n + b_n) \; mod \; 2)$. Neka je $f : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ funkcija tako da je $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i ako se a i b razlikuju u tačno k pozicija tada se $f(a)$ i $f(b)$ razlikuju tačno u k pozicija. Dokazati da ako su $a, b, c \in \mathcal{B}_n$ i $a + b + c = \mathbf{0}$ da je tada i $f(a) + f(b) + f(c) = \mathbf{0}$.

9. Da li postoje funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za svako $x \in \mathbb{R}$ važi:

   (a) $f(g(x)) = x^2$ i $g(f(x)) = x^3$ (b) $f(g(x)) = x^2$ i $g(f(x)) = x^4$

10. Naći sve $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tako da važi $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$

11. Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ zadovoljava jednakost $f(f(x)) + x = f(2x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}^+$. Dokazati da je $f(x) \geq x$ za svaki $x \in \mathbb{R}^+$.

12. Naći sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tako da važi $f(x+y) = f(x)f(yf(x))$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

13. Neka je $f : [0,1] \to [0,1]$ rastuća funkcija. Dokazati da tada postoji $x \in [0,1]$ tako da je $f(x) = x$. Da li tvrdjenje važi ako je f opadajuća funkcija?

14. Dokazati da ne postoji funkcija $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ tako da važi

$$(f(x))^2 \geq f(x+y)\,(f(x)+y)$$

15. Dokazati da ne postoje funkcije $f, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tako da je $x^2 = f([x]) + h(\{x\})$.

16. (Košijeva jednačina)

    (a) Neka je $f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ i neka važi $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Dokazati da je f linearna funkcija.

    (b) Neka je $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ (neprekidna funkcija) koja zadovoljava predhodnu jednačinu.

17. Naći sve $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ koje zadovoljavaju jednačinu $f(xy) = f(x) + f(y)$.

18. Naći sve $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ koje zadovoljavaju jednačinu $f(xy) = f(x)f(y)$.

19. Naći sve $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ koje zadovoljavaju jednačinu $f(x+y) + f(y-x) = 2f(x)f(y)$.

20. Naći sve funkcije: (a) $f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ (b) $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ koje zadovoljavaju funkcionalnu jednačinu

$$(f(x)+f(z))\,(f(y)+f(t)) = f(xy-zt) + f(xt+yz)$$

21. Odrediti sve polinome $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju jednakost:

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

    za sve realne brojeve a, b, c za koje je $ab + bc + ca = 0$.

22. Naći sve polinome $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ i $P(x) \neq const$ za koje važi $P(x^3+1) = (P(x+1))^3$

23. Naći sve polinome $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ za koje važi $P(0) = 0$ i $P(x) = \frac{P(x-1)+P(x+1)}{2}$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

24. Odrediti sve nenuma polinome $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ za koje važi $P(x^2) = (P(x))^2$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

25. ....(Pa dajte i vi neki zadatak ;)))))