Kombinatorika

Marko Petković
gimnazija Svetozar Marković, Niš

Subota, 02.01.2006

1. Na svakoj planeti jednog sistema sedi astronom i posmatra najbližu planetu. Rastojanja medju planetama su medjusobno različita. Ako je broj planeta neparan dokazati da postoji planeta koju niko ne posmatra.

2. Dat je niz $c_1c_2\dots c_n$ gde su c_i dekadne cifre pri čemu je $c_1 \neq 0$. Dokazati da postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da zapis broja 2^k u dekadnom sistemu počinje zadatim nizom cifara.

3. Naći broj nepraznih podskupova S skupa $\mathbb{N}_n = 1, \dots, n$ tako da S ne sadrži dva uzastopna broja.

4. Naći broj uredjenih parova (A, B) tako da je $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}_n$.

5. U svako polje table 3×3 upisan je jedan realan broj. Element u preseku i-te vrste i j-te kolone jednak je razlici zbira brojeva u i-toj vrsti i zbira brojeva u j-toj koloni. Dokazati da je svaki broj u tabli jednak zbiru ili razlici druga dva broja.

6. Dato je $n \geq 4$ tačaka u ravni tako da je rastojanje izmedju svake dve ceo broj. Dokazati da je bar $\frac{1}{6}$ od tih rastojanja deljiva sa 3.

7. Dat je skup od 2000 različitih tačaka u ravni čije su koordinate $(x_1, y_1), \dots, (x_{2000}, y_{2000})$ tako da je $0 \leq x_i \leq 83$, $0 \leq y_i \leq 1$ za svako $i = 1, 2, \dots, 2000$ i $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$.

   a) Dokazati da postoji $n = 25$ tačaka koje pripadaju kvadratu stranice 1 (uključujući i ivice kvadrata).

   b) Naći kontraprimer za $n = 26$.

8. Neka je $\mathcal{B}_n \subset \{0, 1\}^n$ i $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Definišimo operaciju $\oplus$ na $\mathcal{B}_n$ na sledeći način $a \oplus b = ((a_1 + b_1) \; mod \; 2, \dots, (a_n + b_n) \; mod \; 2)$. Neka je $f : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ funkcija tako da je $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i ako se a i b razlikuju u tačno k pozicija tada se $f(a)$ i $f(b)$ razlikuju tačno u k pozicija.

   a) Dokazati da ako su $a, b, c \in \mathcal{B}_n$ i $a + b + c = \mathbf{0}$ da je tada i $f(a) + f(b) + f(c) = \mathbf{0}$.

   b) Koliko ima funkcija $f : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n$ koje zadovoljavaju uslove zadatka.

9. Na kvadratnoj tabli 4×4 postavljeno je 15 kvadratnih pločica koje su numerisane brojevima $1, \dots, 15$. Jedno polje je ostalo slobodno. Dozvoljeno je premeštanje kvadratnih pločica tako što se na slobodno polje premesti pločica sa susednog (dva polja su susedna ako imaju zajedničku stranicu). Da li je moguće polazeći od pozicije sa slike 1 dobiti poziciju sa slike 2?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Slika 1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Slika 2

10. Tabla 8×8 izdeljena je na 64 jedinična kvadrata. Domine oblika znaka $+$ postavljene su na tablu tako da se ne preklapaju, da se njihove ivice poklapaju sa ivicama jediničnih kvadrata i da su cele unutar table. Koliko najviše domina može da se postavi na ovaj način?

11. Data je šahovska tabla $(2n-1) \times (2n-1)$ u čija polja su upisane strelice $\uparrow$, $\rightarrow$, $\downarrow$ i $\leftarrow$. Na nekom od polja se nalazi mrav. U svakom koraku mrav prelazi na susedno polje u skladu sa smerom strelice. Kad mrav napusti polje strelica u njemu se rotira za 90^0 u smeru kretanja kazaljke na satu. Dokazati da će posle dovoljno mnogo koraka mrav napustiti tablu.

12. Dokazati jednakost:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$$

13. Izračunati

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

14. Na koliko načina n bračnih parova može sesti za okrugli sto sa $2n$ označenih stolica tako da supružnici ne sede jedno pored drugog?

15. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $\phi(n)$ broj uzajamno prostih brojeva manjih od n. Ako je $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ gde su p_i različiti prosti brojevi, tada važi:

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \sum_{d|n} \phi(d)$$

16. Dokazati jednakost:

$$n! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n$$

17. Na nekom takmičenju, 8 sudija je ocenjivalo takmičare sa "da" i "ne". Poznato je da za svaka dva takmičara, dvojica sudija su dali odgovor "da" obojici takmičara, dvojica su dali prvom "da" a drugom "ne", dvojica prvom "ne" a drugom "da", a preostala dvojica sudija su dala obojici takmičara "ne". Koliki je maksimalni mogući broj takmičara?

18. Koliko ima matrica A formata $p \times p$ čiji elementi pripadaju skupu $\{0, \ldots, p-1\}$ tako da p ne deli $\det A$, ako je p prost broj?

19. Elementi matrice $A \in M_n(R)$, koji se nalaze na glavnoj dijagonali jednaki su 0; dok su ostali elementi iz skupa $\{1, -1\}$. Da li postoji matrica A koja zadovoljava navedeni uslov i za koju je $\det A = 0$, ako je

    (a) $n = 2005$;

    (b) $n = 2006$?

20. Na nekom ostrvu živi n divljaka. Svaka dvojica su ili prijatelji i neprijatelji. Jednog dana, njihov poglavica je naredio da svi stanovnici ostrva (ukljucujuci i njega) naprave ogrlice od kamenčića pri čemu svaka dva prijatelja moraju imati barem jedan kamenčic iste vrste, dok svaka dva neprijatelja ne smeju imati kamenčiće iste vrste na svojim ogrlicama. Dokazati da divljaci mogu da izvrše poglavičino naredjenje. Koliki je minimalan broj vrsta kamenčica za to potreban.