

Kompleksni brojevi i primena u geometriji

Marko Petković

Subota, 9. Oktobar 2004 god

1 Osnovni pojmovi i tvrdjenja:

1. Skup kompleksnih brojeva: $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $i^2 = -1$
2. Oblici kompleksnog broja:
 - (a) Algebarski: $z = x + iy$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$
 - (b) Trigonometrijski: $z = \rho(\cos\phi + i \sin\phi)$, $|z| = \rho$, $\arg z = \phi$.
 - (c) Eksponencijalni: $z = \rho e^{i\phi}$
3. Moduo kompleksnog broja: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x + iy$.
4. Konjugovano-kompleksni broj: $\bar{z} = x - iy$, $z = x + iy$.
5. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
6. $(\cos\phi_1 + i \sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i \sin\phi_2) = (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$

2 Zadaci

1. Odrediti skup tačaka u kompleksnoj ravni koje zadovoljavaju sledece uslove:
 - a) $2 < |z| < 3$, $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/3$
 - b) $|z| \geq 1$, $\pi/6 \leq \phi \leq \pi/3$
 - c) $|z - z_0| < 1$
 - e) $|z| + \operatorname{Re} z \leq 2$
2. Dokazati da ne postoje kompleksni brojevi a i b za koje je $|a| = |b| = 1$, $\operatorname{Re} a = 2\operatorname{Im} b$, $\operatorname{Re} b = 2\operatorname{Im} a$.
3. Ako je $|z| < 1/2$ dokazati da je $|(1 + i)z^3 + iz| < 3/4$.
4. Dokazati da za svaka dva kompleksna broja važi: $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.
5. Pokazati da je $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ realan broj ako je $|z_1| = |z_2| = 1$.
6. Dokazati da su tačke $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ temena jednakostraničnog trougla akko je

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

7. Koreni jednačine $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ obrazuju jednakostranični trougao akko je $a^2 = 2b$
8. Dokazati da polinom $P(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ ima četiri kompleksne nule po modulu jednake 1.

Definicija 1. $V(a, b, c) = \frac{a-c}{b-c}$, $W(a, b, c, d) = \frac{V(a, b, c)}{V(a, b, d)}$.

Teorema 1. *Trouglovi abc i $a'b'c'$ su slicni akko je $V(a, b, c) = V(a', b', c')$.*

Teorema 2. Tačke a, b i c su kolinearne akko je $V(a, b, c) \in \mathbb{R}$.

Teorema 3. Tačke a, b, c i d pripadaju jednom krugu ili jednoj pravoj akko je $W(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$.

9. Neka su $\triangle ABX$, $\triangle BCY$, $\triangle CAZ$ slični i istosmerni trouglovi. Dokazati da se težišta trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle XYZ$ poklapaju.
10. Nad stranicama trougla $\triangle ABC$ konstruisani su slični jednakokraki trouglovi ABP ($AP = PB$), ACQ ($AQ = CQ$) i BCR ($BR = CR$) tako da su prva dva izvan trougla $\triangle ABC$ dok je R u istoj poluravni odredjenoj sa BC kao i A . Dokazati da je četvorougao $APRQ$ paralelogram.
11. Neka u konveksnom četvorouglu važi $AC = BD$. Izvan četvorougla nad svakom stranicom konstruisani su jednakostranični trouglovi. Ukoliko sa P, Q, R i S obeležimo centre tih trouglova koji odgovaraju redom stranicama AB, BC, CD i DA , dokazati da su prave PR i QS normalne.
12. Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ i neka važi $\frac{a-b}{c-b} \cdot \frac{c-d}{a-d} \in \mathbb{R}$. Tada je i $\frac{a-b}{d-b} \cdot \frac{d-c}{a-c} \in \mathbb{R}$.
13. Neka su $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$ slični i istosmerni trouglovi, a A, B i C tačke koje dele duži A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 u istom odnosu. Dokazati da je $\triangle ABC$ sličan i istosmeran sa prva dva.
14. Dat je četvorougao $ABCD$. Dokazati da važi $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA$, pri cemu jednakost važi akko je četvorougao tetivan.
15. (Ojlerov krug trougla) Dokazati da središta stranica, podnožja visina i središta duži koje spajaju ortocentar sa centrom opisanog kruga a poluprečnik je jednak polovini poluprečnika opisanog kruga tog trougla.
16. Nad stranicama trougla $\triangle ABC$ konstruisani su u njegovoj spoljašnjosti kvadrati $BCDE, CAFG$ i $ABHI$. Neka su $GCDQ, EBHP$ paralelogrami. Dokazati da je $\triangle APQ$ jednakokrako-pravougli trougao.
17. Dat je trougao $\triangle ABC$ takav da je $\alpha = 20^\circ, \beta = \gamma = 80^\circ$. Neka su K i L tačke koje leže na stranicama AB i AC takve da je $\angle KCB = 30^\circ$ i $\angle LBC = 60^\circ$. Odrediti $\angle BLK$.
18. Dat je trougao $\triangle ABC$ takav da je $\alpha = 80^\circ, \beta = \gamma = 50^\circ$. Neka je M tačka unutar njega takva da je $\angle MBC = 10^\circ$ i $\angle MCB = 20^\circ$. Odrediti $\angle CAM$.