# 4. Programski paket MATHEMATICA

## 1 Osnovne aritmetičke operacije

**1.1.** Izračunati vrednosti sledećih konstanti: $2/3+4/5+7/8$, $40!$, $2^{40}+3^{50}$, $\log_2(4294967296)$, $\sin(0.1)-\cos(1.2)$, $\arcsin(0.7)$, $e^{2.2}$.

**1.2.** Sledeće konstante izračunati na 50 decimala: $13/18$, $\sqrt{2}$, $\pi$, $e$, $\sin(\pi/7)$, $\arctan(-0.7)$, $\cos(\cos(5))$, $\sqrt[6]{7}\; e^7+e^8$, $\log_{20} 12345678910$.

**1.3.** Neka je $a=2+3\mathrm{i}$ i $b=7+8\mathrm{i}$. Naći: $a-b$, $\overline{ab}$, $|a^2+b^2|$, $\frac{a}{a+b}$, $\arg(a^3-b^3)$, $\mathrm{Re}\left(\frac{a+\bar{b}}{a^2+b^2}\right)$.

**1.4.** Izračunati vrednosti sledećih suma i proizvoda:

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n},\quad \sum_{i=1}^{10} i^2,\quad \sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{5} i^j,\quad \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{i}\frac{i}{i+j},\quad \prod_{m=1}^{20}\left(1+\frac{1}{m}\right),\quad \prod_{n=1}^{10}\left(n+\frac{1}{n}\right).$$

**1.5.** Izračunati vrednosti: $\binom{10}{5}$, $F_3+F_5+F_7$ ($F_n$ je $n$-ti Fibonačijev broj), $\mathrm{NZD}(20,30,40)$, $\mathrm{NZS}(50,60,70)$, količnik i ostatak pri deljenju 112233445566778899 sa 987654321, ceo i razlomljeni deo broja $\log_{10}(7^7+8^8+9^9)$.

**1.6.** Neka je $a=5$ i $b=2^{10}/5!$. Neka je $c$ ceo deo broja $b$ a $d$ broj koji se dobija zaokruživanjem broja $a^a+b^b+c$. Da li je broj $d$ prost?

## 2 Manipulisanje izrazima

**2.1.** Izvršiti sledeće algebarske transformacije

- Izmnožiti: $(a+b+c+d)^2$, $(x+xy+y)^4(x^2+y^2)^5$,
- Svesti na zajednički imenilac izraze $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$, $\frac{1}{x^4+1}+\frac{1}{x^8-1}$ i naći brojilac i imenilac svedenog razlomka.
- Rastaviti na parcijalne razlomke: $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{x}{(1-x)^2(1-x^2)^3}$
- Grupisati članove po $y$ u razvoju $(1+y+xy)^7$.

**2.2.** Uprostiti sledeće izraze (najpre korišćenjem funkcije `Simplify`, a onda i `FullSimplify`):

- $-4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+16\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$,
- $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)+1$,
- $\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\dfrac{2+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$,
- $\sin^2 x+\cos^2 x$, $\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$

**2.3.** Verifikovati sledeće identitete:

$$\frac{1-\cos(2t)}{1+\cos(2t)} = \tan^2 t, \quad \frac{\cos^3 t + \sin^3 t}{\cos t + \sin t} = 1 - \sin t \cos t.$$

**2.4.** Izraz $\sin(10x) + \cos(10x)$ napisati preko osnovnih trigonometrijskih funkcija $\sin x$ i $\cos x$.

**2.5.** Ako je $A = \dfrac{x+1}{x-1}$, $B = \dfrac{1+x+x^2}{1+y+y^2}$, izračunati $C = \dfrac{A^2+B^2}{A+B}$ (svesti izraz na zajednički imenilac i skratiti ga). Naći vrednost izraza $C$ ako je $x = 0.1$ a $y = 0.2$.

**2.6.** Izračunati koeficijent uz $x^{20}$ u razvoju polinoma $p(q(x))$ gde je $p(x) = (1+x+x^2)^{10}$ a $q(x) = x^2 + 3x + 4$.

# 3 Jednačine, izvodi, integrali,...

**3.1.** Rešiti sledeće jednačine:

$$x^2 + 5x + 6 = 0, \ \sqrt{x^2+1} + x = 4, \ x^7 - 1 = 0.$$

**3.2.** Rešiti sledeće sisteme jednačina:

- $2x + 3y + 5z = 0$, $3x + 2y + 7z = 1$, $2x + 8y + 10z = 3$
- $ax + y + z = 1$, $x + 2ay + z = 3$, $x + y + 3az = 4$
- $x^3 + y^3 = 1$, $x^2 + y^2 = 0$

**3.3.** Odrediti sledeće granične vrednosti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

**3.4.** Naći izvode sledećih izraza: $x^2+1$, $e^{x^2+x+1}$, $\log(e^x + e^{3x})$.

**3.5.** Ako je $f(x) = x^5 e^x$ naći $f''(x)$ i $f'''(x)$. Ako je $g(x,y) = (y+1)f(x+y)$ naći $\frac{\partial g}{\partial y}$ kao i $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$.

**3.6.** Naći nule prvog i drugog izvoda funkcije $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+5)^2}$.

**3.7.** Naći vrednosti sledećih integrala

$$\int x^2 dx, \ \int \log x dx, \ \int_0^1 x^3 e^x dx, \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

**3.8.** Numerički rešiti sledeće odredjene integrale

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x) dx, \ \int_0^{2\pi} e^{\sin x} dx, \ \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

**3.9.** Rešiti integral

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos x} dx$$

najpre analitički a zatim i numerički. Proveriti dobijene rezultate.

**3.10.** Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

- $y'' + y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- $y'^2 + yy'' = \cos x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$,

# 4 Liste

**4.1.** Neka su date liste $L_1 = \{10, 11, 12, 13, 14\}$, $L_2 = \{5, 5, 5, 5\}$. Izračunati

- Listu koja se dobija spajanjem listi $L_1$ i $L_2$,
- Dužinu listi $L_1$ i $L_2$,
- Uniju, presek i razliku ovih listi,
- Poslednja dva elementa liste $L_1$,

**4.2.** Neka je $L_1 = \{2i - 1 \mid 1 \leq i \leq 100\}$ i $L_2 = \{3i \mid 1 \leq i \leq 100\}$. Naći $L = L_1 \cap L_2$ kao i proizvod elemenata ovog skupa. Formirati listu $L_3 = L_1 \cup L_2$, sortirati je u rastućem poretku i naći 10-ti element sortirane liste.

**4.3.** Formirati listu $L_1 = \{1, 4, 9, \ldots, 10000\}$ svih brojeva od 1 do 10000 koji su potpuni kvadrati. Formirati listu $L_2 = \{1^3, 3^3, 5^3, \ldots, 21^3\}$ kubova neparnih brojeva od 1 do 21. Koliko zajedničkih elemenata imaju ove dve liste?

**4.4.** Odrediti najveći element liste $L = \{10i - i^2 \mid -10 \leq i \leq 10\}$. Ovaj element dodati na 2 mesto liste $M = \{a, b, c, d, e\}$.

**4.5.** Neka je $L$ lista delilaca broja 1092710927. Naći:

- Proizvod elemenata liste $L$,
- Zbir elemenata na parnim pozicijama liste $L$.

Koliko prostih delilaca ima ovaj broj?

**4.6.** Naći koeficijent uz $x^{15}$ u razvoju $(1 + 3x + x^2)^{10}(2x + 1)^5$. Naći listu koeficijenata koji stoje uz $x^{10}, x^{11}, \ldots, x^{20}$ u prethodnom razvoju.

**4.7.** Generisati tabelu vrednosti funkcija $\sin x$, $\cos x$ i $x^2 - x$ za $x$ od 0 do $2\pi$ sa korakom 0.1. U prvoj koloni su vrednosti za $x$ a u ostalima vrednosti nabrojanih funkcija. Eksportovati ovu tabelu u fajl `tabela.txt`.

**4.8.** Formirati listu

$$\{1, 1, 1, 2, 4, 8, 3, 9, 27, \ldots, k, k^2, k^3, \ldots, 10, 100, 1000\}$$

Formirati najpre odgovarajuću listu u dva nivoa a onda je izravnati funkcijom `Flatten`.

**4.9.** Dokazati da za proizvoljne vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ važi

$$\left[\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$$

Napomena. Napisati izraze sa obe strane jednakosti u opštem obliku, uprostiti ih i pokazati da su jednaki.

**4.10.** Generisati Paskalov trougao do 10-tog reda. To je lista u dva nivoa $\{\binom{i}{j} \mid 0 \leq i, j \leq 10\}$. Kreiranu listu tabelarno prikazati.

**4.11.** Generisati matricu $A = [a_{ij}]$ reda $10 \times 10$ gde je

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 5, & |i-j| = 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Naći determinantu matrice $A$. Eksportovati ovu matricu u fajl `Matrix.txt`.

**4.12.** Neka je su $A$ i $B$ matrice formata $10 \times 10$ definisane sa $A = [1/(i+j)]$ i $B = [i+j]$. Naći $AB$ i $A^{-1}$. Eksportovati ova dva rezultata u fajlove `Rez1.txt` i `Rez2.txt`.

**4.13.** Generisati sledeću matricu

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos(\theta) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos(\theta) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos(\theta) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos(\theta) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

i naći njenu determinantu.

**4.14.** Napisati funkciju koja za datu listu $L = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ izračunava vrednost $f(L) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n$.

**4.15.** Ako je $S(n)$ zbir cifara broja $n$ izračunati $\sum_{n=1}^{1000} S(n)^2$.

**4.16.** Neka je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jedna permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Definišimo $S(a) = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n$. Napisati funkciju koja izračunava vrednost $S(a)$. Pomoću ove funkcije naći maksimalnu moguću vrednost broja $S(a)$ za $n = 5$. Za koje permutacije se ovaj maksimum dostiže?

**4.17.** Napisati funkciju koja za zadatu funkciju $f$ i listu promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formira gradient $\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Naći gradient funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2yz + z^2$.

**4.18.** Napisati funkciju `PascalRed[n]` koja formira $n$-ti red Paskalovog trougla, odnosno listu $\{\binom{n}{k} \mid 0 \le k \le n\}$. Naći najveći zajednički delilac (NZD) svih brojeva $\binom{10}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, 10$. Funkcija `GCD` računa NZD i može da ima proizvoljan broj argumenata.

**4.19.** Napisati funkciju koja za datu listu $L = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i dati broj $m$ $(m \le (n+1)/2)$ formira Hankelovu matricu $H_m(L) = [a_{i+j-1}]_{1 \le i,j \le m}$. Naći $\det H_5(L)$ za $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Napomena. Funkcija ne treba da proverava da li je $m \le (n+1)/2$.

**4.20.** (Shuffle)

**(1)** Napisati funkciju `Shuffle` koja obavlja operaciju mešanja elemenata liste parne dužine. Ova operacija od liste $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_{2n}\}$ pravi sledeću listu

$$L' = \{l_1, l_{n+1}, l_2, l_{n+2}, \ldots, l_n, l_{2n}\}.$$

Napomena: Najpre formirati listu $\{\{l_1, l_{n+1}\}, \{l_2, l_{n+2}\}, \ldots, \{l_n, l_{2n}\}\}$ a onda je "izravnati" (tj "ukinuti" unutrašnje liste) funkcijom `Flatten`.

**(2)** (Perfect shuffle) Napisati funkciju `Period` koja za uneti broj $n$ izračunava potreban broj primene funkcije `Shuffle` na listu $L = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ posle kog se ponovo dobija polazna lista. Grafički predstaviti vrednosti ove funkcije za $n = \overline{1, 20}$.

**4.21.** Napisati funkciju koja računa sumu elemenata liste $L$ koji su deljivi sa 3. Na primer, za $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ova suma je jednaka 9 (3 i 6 su deljivi sa 3).

**4.22.** Napisati funkciju koja računa broj elemenata liste $L$ koji pri deljenju sa 7 daju ostatak 3 a pri deljenju sa 13 daju ostatak 7. Koliko ima takvih brojeva izmedju 1 i 10000?

**4.23.** Napisati funkciju `Vrednost[F_,var_,vred_]` koja računa vrednost izraza `F` za zadate vrednosti `vred` promenljivih `var`. Liste promenljivih i vrednosti `var` i `vred` mogu biti proizvoljne dužine.

# 5 Grafika

**5.1.** Nacrtati grafik funkcije $f(x) = x \cos x$ na segmentu $[-5, 5]$. Neka je boja linije crvena, debljina linije 0.005 i neka je linija isprekidana (sa parametrom 0.02). Neka su oznake na grafiku pisane fontom iz familije `Arial` i veličine 14.

**5.2.** Na istom grafiku prikazati sledeće funkcije:

- $f_1(x) = x$,
- $f_2(x) = e^{\cos x}$,
- $f_3(x) = \left\{ \begin{array}{rl} x, & |x| \leq 1 \\ 2 - x, & |x| > 1 \end{array} \right.$,

na segmentu $[-3, 3]$. Podesiti ose tako da su vrednosti na $x$ osi u intervalu $[-3, 3]$ a na $y$ osi u intervalu $[-10, 10]$.

**5.3.** Nacrtati grafik funkcija (sve funkcije na jednom grafiku) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$ na segmentu $[-2, 2]$. Neka je prva funkcija prikazana linijom crvene boje i debljine 0.005 a druga isprekidanom linijom (parametar 0.02) plave boje i standardnom debljinom. Neka su i ose grafika debljine 0.005.

**5.4.** Grafički predstaviti sledeću parametarski zadatu krivu:

$$x_{card}(t) = \frac{t}{4} - \sin(t), \quad y_{card}(t) = 1 - \cos(t), \quad t \in [0, 6\pi].$$

Podesiti da je boja linije crvena, a debljina jednaka 0.005 (direktiva `Thickness`). Naći dužinu luka krive iz prethodnog dela pomoću izraza

$$\int_0^{6\pi} \sqrt{x'_{card}(t)^2 + y'_{card}(t)^2}\, dt.$$

**5.5.** Grafički predstaviti rešenja jednačine $\cos x + \cos y = 1/2$ za $x, y \in [-\pi, \pi]$. Grafik eksportovati u `PNG` formatu u fajl `GrafRes.png`.

**5.6.** Konstruisati listu $\{\{1, f(1)\}, \{2, f(2)\}, \ldots, \{n, f(n)\}\}$ gde je $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Konstruisanu listu predstaviti grafički, pri čemu su tačke crvene i veličine 0.015. Nacrtati grafik funkcije $f(x)$ i oba grafika prikazati zajedno.

**5.7.** Nacrtati 3D grafik funkcija:

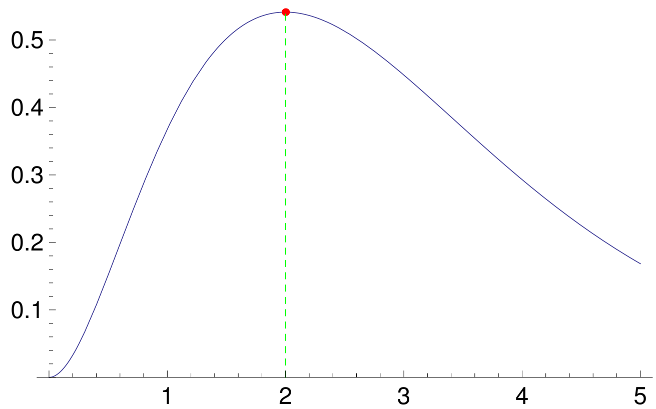
- $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$, za $x \in [-3,3]$ i $y \in [-2,2]$.
- $f(x,y) = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ y^2 - x^2, & x < y \end{cases}$, za $x \in [-3,3]$ i $y \in [-3,3]$.

Pritom neka su vrednosti na $x$ i $y$ osi u opsegu $[-3,3]$ a na $z$ osi u opsegu $[0,9]$.

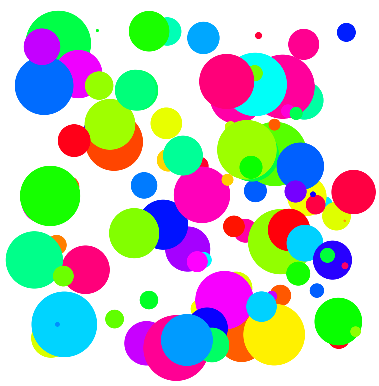
**5.8.** Nacrtati grafik rešenja jednačine $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$ za $x, y, z \in [-\pi/2, \pi/2]$.

**5.9.** Napisati funkciju koja crta četvorougao. Parametar funkcije je lista od 4 elementa koji predstavljaju temena četvorougla. Označiti temena. Stranice četvorougla obojiti zelenom a temena crvenom bojom.

**5.10.** Nacrtati grafik funkcije $f(x) = x^2 e^{-x}$ kao na slici.

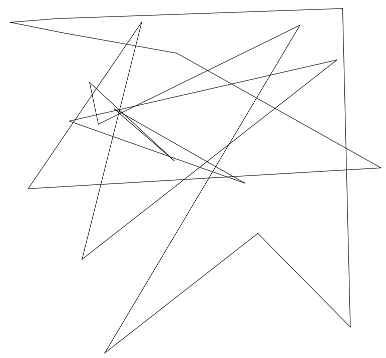



**5.11.** Formirati listu `centar` koja se sastoji od 100 parova pseudoslučajnih brojeva iz segmenta $[0,1]$, kao i liste `radius` i `boja` koje se sastoje od po 100 pseudoslučajnih brojeva redom segmenta $[0, 0.1]$ i $[0,1]$. Grafički predstaviti krugove čiji su centri, poluprečnici i boja redom elementi listi `centar`, `radius` i `boja`. Sliku eksportovati u fajl `krugovi.eps`.

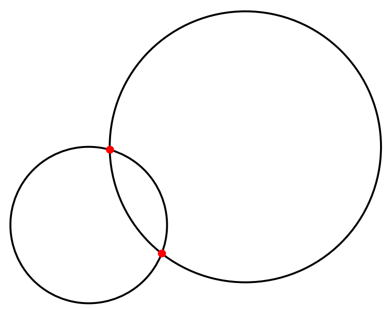


Funkcija `RandomReal[x]` vraća pseudoslučajni broj iz segmenta $[0, x]$. Za boju koristiti direktivu `Hue`.

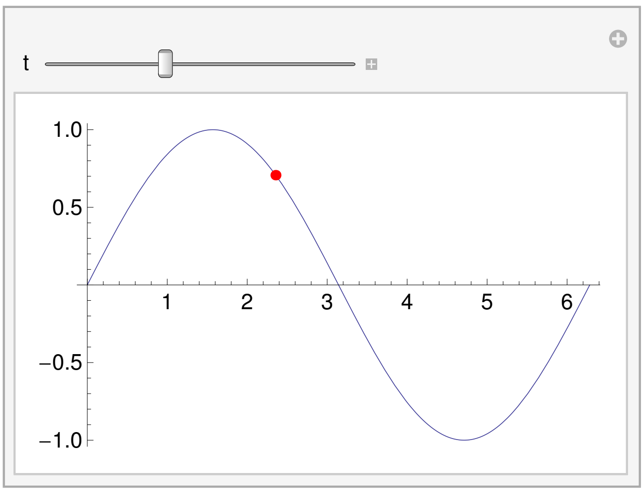
**5.12.** Nacrtati zatvorenu izlomljenu liniju kao na slici, pri čemu su temena pseudoslučajne tačke u jediničnom kvadratu. Uzeti da je broj temena $n = 20$.



**5.13.** Nacrtati dva kruga, prvi sa centrom u tački $(0, 0)$ i poluprečnikom 1, a drugi sa centrom u $(2, 1)$ i poluprečnikom $\sqrt{3}$. Označiti presečne tačke ova dva kruga. Za debljinu linije koristiti direktivu `Thickness[0.005]`, a za veličinu tačaka `PointSize[0.02]`.



**5.14.** Napraviti interaktivnu demonstraciju koja prikazuje grafik funkcije $\sin x$ za $x$ od 0 do $\pi/2$ zajedno sa jednom tačkom na grafiku $(t, \sin t)$ gde $t$ ide takodje od 0 do $\pi/2$. Tačka je crvena, a veličina tačke je 0.02.



# 6 Programiranje

**6.1.** Napisati sekvencu koda koja ispisuje vrednosti koeficijenta uz $x^n$ u razvoju $(1+x+x^2)^n$ za $n = 0, 1, \ldots, 10$. Nakon toga, modifikovati kod tako da se pored ispisivanja generiše i lista ovih koeficijenata.

**6.2.** Napisati sekvencu koda koja računa vrednosti integrala $I_n = \int x^n e^{-x} dx$. Nakon toga, modifikovati kod tako da se pored vrednosti $I_n$ ispisuje i vrednost izvoda polinoma $e^x \cdot I_n$ za $n = 0, 1, \ldots, 10$. Šta možemo uočiti?

**6.3.** Napisati funkciju koja računa $n$-ti član niza $x_k$ definisanog sa $x_{k+1} = (ax_k^2 + bx_k + c) \mod m$. Ulazni parametri funkcije su koeficijenti $a, b, c, m$ kao i vrednost $x_0$.

**6.4.** Napisati funkciju koja kvadrira svaki negativni element liste $L$. Na primer, ako je $L = \{1, -2, 3, -4\}$, funkcija vraća listu $\{1, 4, 9, 16\}$.

**6.5.** Napisati funkciju koja izbacuje sve negativne elemente liste $L$ koji se nalaze na početku liste. Na primer, ako je $L = \{-1, -2, 3, 4, -5, 6\}$, funkcija vraća listu $\{3, 4, -5, 6\}$. Ukoliko su svi elementi liste negativni, funkcija vraća praznu listu $\{\}$.

**6.6.** Napisati funkciju koja za unete prirodne brojeve $n$ i $k$ pronalazi delioc $d$ broja $n$ koji je najbliži $k$.

**6.7.** Napisati funkciju koja računa zbir prostih delioca broja $n$.

**6.8.** Napisati funkciju koja za dat prirodan broj $n$ nalazi minimalan broj $k$ takav da je $k! > n$.

**6.9.** Napisati funkciju `MCIntegrate` koja izračunava vrednost

$$(b-a)\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

gde su $x_i$ pseudoslučajni brojevi iz segmenta $[a, b]$[1]. Parametri funkcije `MCIntegrate` su $f$, $a$, $b$ kao i broj $n$. Funkcija `RandomReal` koristi se za generisanje pseudoslučajnog broja iz segmenta $[a, b]$ na sledeći način `RandomReal[{a,b}]`.

**6.10.** Napisati funkciju koja generiše pseudoslučajnu tačku $(x, y)$ na jediničnom krugu. Generisanje izvršiti primenom formula $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ gde je $\varphi$ pseudoslučajni broj u intervalu $(0, 2\pi)$. Napisati funkciju koja generiše $n$ takvih tačaka i prikazuje ih grafički zajedno sa krugom.

**6.11.** Napisati funkciju koja računa broj promena znaka u listi $L$. Ukoliko neki element liste $L$ nije broj, ili je jednak 0, funkcija vraća vrednost $-1$. Funkcija `NumberQ[x]` proverava da je `x` broj.

**6.12.** Napisati funkcije `Suma1` i `Suma2` koje računaju zbir elemenata unete liste. Pritom `Suma1` računa zbir korišćenjem `Do` ciklusa, dok `Suma2` koristi funkciju `Apply` (odnosno `@@`. Odštampati vremena izvršenja jedne i druge funkcije, primenjene na listu $L = \{1, 2, \ldots, n\}$ za $n = 100, 1000, 10000, 50000$. Funkcija `AbsoluteTiming` vraća rezultat i vreme izvršenja nekog izraza.

[1] Ova vrednost predstavlja aproksimaciju integrala funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ dobijenu primenom Monte-Carlo metoda. Relativna greška ovog metoda je proporcionalna sa $1/\sqrt{n}$.

**6.13.** Napisati sekvencu koda koja generiše sve parove brojeva $(a, b)$ gde je $a, b \leq 10^6$ takvih da je zbir delioca broja $a$ (manjih od $a$) jednak broju $b$, i obrnuto, zbir delioca broja $b$ (manjih od $b$) jednak broju $a$. Takvi parovi su npr $(220, 284), (1184, 1210), \ldots$.

**6.14.** Napisati funkciju `BrJed` koja računa broj jedinica u binarnom zapisu datog broja $x$. Napisati funkciju `F` koja za parametre $m$ i $n$ računa vrednost sume

$$\frac{n}{\texttt{BrJed}(n)} - \frac{n+1}{\texttt{BrJed}(n+1)} + \ldots + (-1)^{m-n}\frac{m}{\texttt{BrJed}(m)}.$$

**6.15.** Napisati funkciju `InvCif` koja za date cele brojeve $x$ i $m$ formira broj koji se dobija zapisivanjem cifara broja $x$ u sistemu sa osnovom $m$, u inverznom poretku. Na primer, za $x = 100$ i $m = 3$ važi $x = (11002)_3$ pa je rezultat funkcije $(20011)_3 = 166$.

**6.16.** Napisati funkciju `MaxIzvod` koja za unet izraz $F$ i promenljivu $x$ i vrednost $x_0$, pronalazi red $0 \leq n \leq 10$ izvoda $F$ čija je vrednost u $x_0$ maksimalna.

**6.17.** Napisati funkciju `IzbaciMax` koja za unetu listu $A$ vraća listu $L$ koja se dobija izbacivanjem maksimalnog elementa iz liste $A$, kao i svih elemenata jednakih tom maksimalnom elementu. Na primer, za $A = \{1, 2, 3, 3, 3, 0\}$ funkcija vraća $L = \{1, 2, 0\}$.

**6.18.** (Metod polovljenja intervala) Napisati funkciju `NulaMPI` koja odredjuje jedinstveno rešenje jednačine $f(x) = 0$ na zadatom intervalu $(a, b)$, primenom metoda polovljenja intervala. Ovaj metod se sastoji u sledećem. Najpre se izračuna sredina intervala $s = (a + b)/2$ kao i $f(s)$. Zatim se novi interval u kome se nalazi rešenje odredjuje na sledeći način:

1. slučaj. $f(a) < 0 < f(b)$. Ako je $f(s) < 0$, novi interval postaje $(s, b)$, u suprotnom je $(a, s)$.

2. slučaj. $f(a) > 0 > f(b)$. Ako je $f(s) < 0$, novi interval postaje $(a, s)$, u suprotnom je $(s, b)$.

Postupak se dalje ponavlja sve dok je $b - a < \epsilon$ gde je $\epsilon > 0$ dat broj. Testirati funkciju za $f(x) = \cos x - x$ na intervalu $(0, \pi/2)$.

**6.19.** Napisati funkciju `Borwein` za računanje polinoma $A_n(q)$, $B_n(q)$ i $C_n(q)$ koji zadovoljavaju izraz

$$\prod_{i=0}^{n-1}(1 - q^{3i+1})(1 - q^{3i+2}) = A_n(q^3) - qB_n(q^3) - q^2C_n(q^3).$$

Za unet broj $n$ i promenljivu $q$, funkcija vraća listu $\{A_n(q), B_n(q), C_n(q)\}$.
Napomena: Polinom $A_n(q)$ sastoji se od koeficijenata polinoma sa leve strane uz stepene $q^0, q^3, q^6, \ldots$. Slično, polinomi $B_n(q)$ i $C_n(q)$ se sastoje od koeficijenata uz $q^1, q^3, q^5, \ldots$, odnosno $q^2, q^4, \ldots$.

**6.20.** Niz funkcija $f_n(x)$ definisan je sledećom rekurentnom formulom

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt,$$

pri čemu je $f_0(x)$ poznata funkcija. Napisati funkciju `PonInt` koja računa $f_n(x)$ za zadato $n$ i $f_0(x)$ (u obliku izraza). Napisati funkciju `Int2` koja računa vrednost izraza

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x - t)^{n-1} f_0(t)dt$$

za unete vrednosti $n$ i $f_0(x)$ (u obliku izraza). Izračunati vrednosti funkcija `PonInt` i `Int2` za $n = 5$ i $f_0(x) = e^x$, $f_0(x) = \sin x$ i $f_0(x) = \cos x$. Šta se može uočiti na osnovu dobijenih rezultata?

# 7 Modeliranje fizičkih procesa

**7.1.** Napisati funkciju `Res[a]` koja vraća rešenje jednačine $\cos x = ax$ u okolini tačke $x = 0$. Nacrtati grafik ovog rešenja za vrednosti $a$ od 1 do 10. Napraviti tabelu vrednosti rešenja za $a$ od 1 do 10 sa korakom 0.1.

**7.2.** (Matematičko klatno) Kuglica obešena o neistegljivu nit dužine $l$, osciluje u gravitacionom polju. Jednačina koja opisuje oscilovanje kuglice je

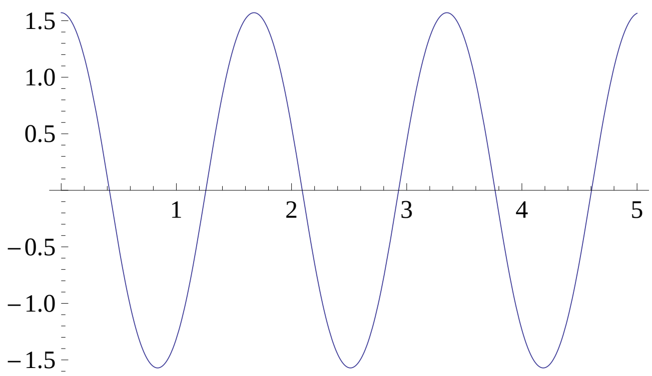
$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t)$$

gde je $g = 9.81\mathrm{m/s}^2$ gravitaciona konstanta i neka je $l = 1\mathrm{m}$.

**(1)** Numerički rešiti jednačinu kretanja klatna uz početne uslove $\theta(0) = \pi/3$ i $\theta'(0) = 0$ za $t$ od 0s do 2s.

**(2)** Nacrtati grafik rešenja i tabelarno prikazati vrednosti za $t$ od 0s do 2s sa korakom 0.1s.

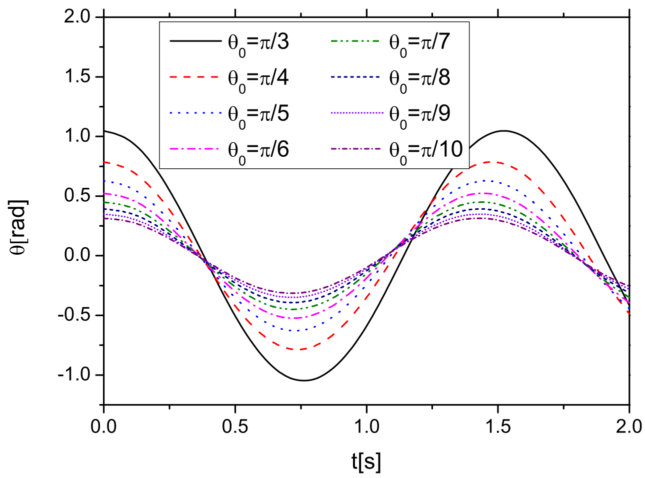
**(3)** Grafik eksportovati u fajl `klatno.eps` a vrednosti u fajl `klatno.dat`.



**7.3.** Posmatrajmo ponovo problem matematičkog klatna iz prethodnog zadatka.

**(1)** Napisati funkciju `Res[th0_]` koja za zadatu vrednost $\theta_0$ numerički rešava jednačinu kretanja klatna uz početne uslove $\theta(0) = \theta_0$ i $\theta'(0) = 0$.

**(2)** Tabelarno prikazati vrednosti $\theta(t)$ za $t$ od 0s do 2s sa korakom 0.1s, za početne uslove $\theta(0) = \pi/3, \pi/4, \ldots, \pi/10$. Rezultate prebaciti u `Origin` i srediti grafik kao na slici.



**7.4.** (Prigušeno oscilovanje klatna) Posmatrajmo problem matematičkog klatna na koje deluje sila dinamičkog trenja koja je proporcionalna (ugaonoj) brzini klatna. Ako su $\theta(t)$ i $\omega(t)$ položaj i brzina klatna u trenutku $t$, onda jednačine kretanja imaju sledeći oblik

$$\begin{aligned}\theta'(t) &= \omega(t)\\ \omega'(t) &= -\beta\omega(t) - \frac{g}{l}\sin\theta(t)\end{aligned}$$

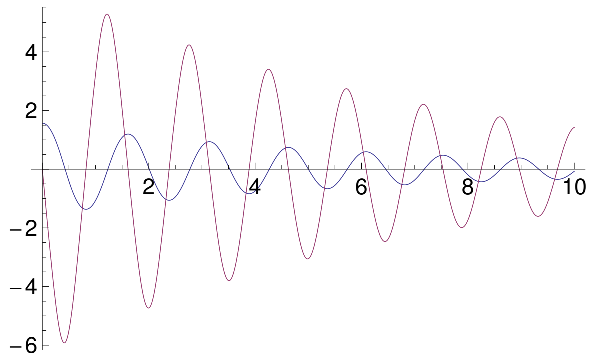
Neka je[2] $l = 1$ a $g = 9.81$.

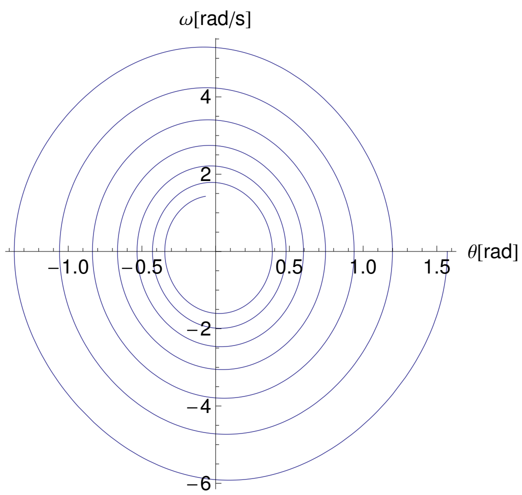
**(1)** Numerički rešiti sistem jednačina kretanja klatna za $\beta = 0.2$, $\theta(0) = \pi/2$ i $\omega(0) = 0$ i za vrednosti $t$ od 0 do 2. Na istom grafiku prikazati funkcije $\theta(t)$ i $\omega(t)$.

**(2)** Grafički prikazati zavisnost ugaone brzine $\omega(t)$ od ugla $\theta(t)$ za $t$ od 0 do 2 (fazni dijagram klatna).

**(3)** Napisati funkciju `KlatnoResBrzina[th0_, beta_]` koja za date vrednosti parametara vraća položaj i ugaonu brzinu klatna za $t$ od 0 do 2.

**(4)** Nacrtati uporedni grafik ugla $\theta(t)$ za početni ugao $\theta(0) = \pi/2$ i vrednosti $\beta = 0.1, 0.5, 10$. Šta možemo uočiti?




[2] U ovom i narednim zadacima sve veličine su date bez odgovarajućih jedinica.

**7.5.** (Kretanje planete oko zvezde) Planeta mase $m$ kreće se oko zvezde mase $M$ pod dejstvom gravitacionog polja. Predpostavimo da se zvezda nalazi u koordinatnom početku i neka je $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ položaj planete posle vremena $t$. Diferencijalne jednačine kretanja ovog sistema su:

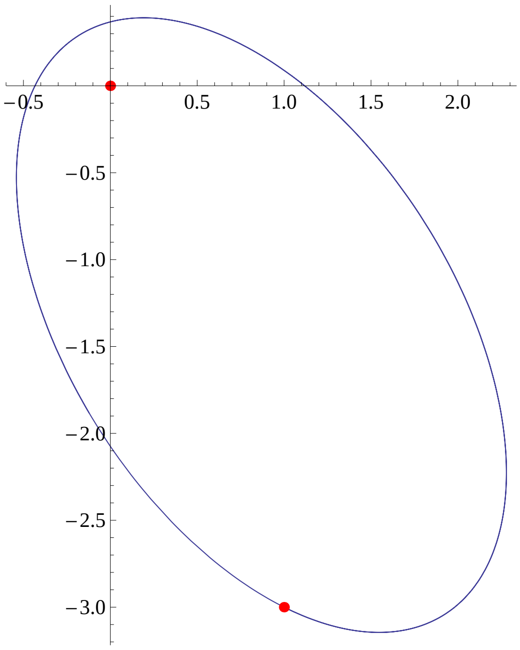
$$x''(t) = -\gamma M \frac{x(t)}{(x^2(t) + y^2(t))^{3/2}}, \qquad y''(t) = -\gamma M \frac{y(t)}{(x^2(t) + y^2(t))^{3/2}}.$$

Pretpostaviti da je $\gamma M = 10$.

**(1)** Numerički rešiti jednačine kretanja tela za početne uslove $x(0) = y(0) = 1$, $x'(0) = 1$, $y'(0) = -1$ za $t$ od 0 do 10.

**(2)** Grafički prikazati položaj tela tokom kretanja (funkcija `ParametricPlot`).

**(3)** Nacrtati grafik rastojanja $d(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ planete od zvezde. Naći vremenske trenutke kada je planeta najbliža i najudaljenija od zvezde za $t$ od 0 do 6.



**7.6.** (Matematičko klatno - analitičko rešenje) Poznato je da za male vrednosti ugla $\theta$ važi aproksimacija $\sin\theta \approx \theta$. Uz ovu aproksimaciju, jednačina kretanja matematičkog klatna postaje

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l}\theta(t).$$

**(1)** Rešiti ovako dobijenu jednačinu analitički uz početne uslove $\theta'(0) = 0$ i $\theta(0) = \pi/10, \pi/3$. Označiti rešenja sa $\theta_{a1}(t)$ i $\theta_{a2}(t)$.

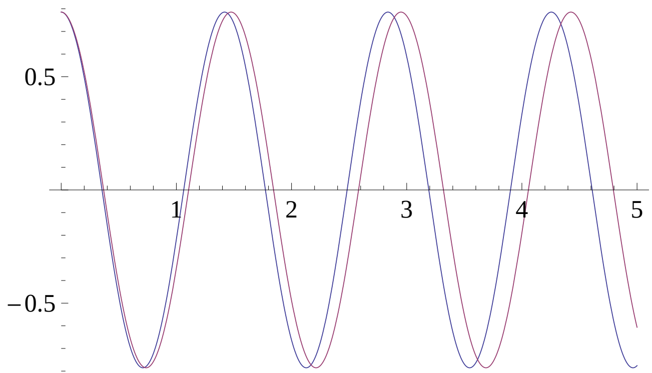
**(2)** Numerički rešiti osnovnu jednačinu kretanja (zadatak 1):

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l}\sin\theta(t)$$

uz iste početne uslove kao u delu **(1)**. Označiti rešenja sa $\theta_{n1}(t)$ i $\theta_{n2}(t)$.

**(3)** Nacrtati uporedni grafik rešenja $\theta_{a1}(t)$ i $\theta_{n1}(t)$, kao i $\theta_{a2}(t)$ i $\theta_{n2}(t)$. Šta može da se uoči?

**(4)** Tabelarno prikazati vrednosti $\theta_{n1}(t)$ za $t$ od 0s do 2s sa korakom 0.1s. Tabelu eksportovati u fajl `klatnoanaliticki.dat`.



**7.7.** Telo mase $m$ i naelektrisanja $q$ nalazi se izmedju dva tela naelektrisanja $q_1$ i $q_2$ koja su fiksirana i nalaze se na medjusobnom rastojanju $l$. Srednje telo se postavi na rastojanje $x_0$ od prvog i pusti da osciluje bez početne brzine. Diferencijalna jednačina koja opisuje oscilovanje tela je

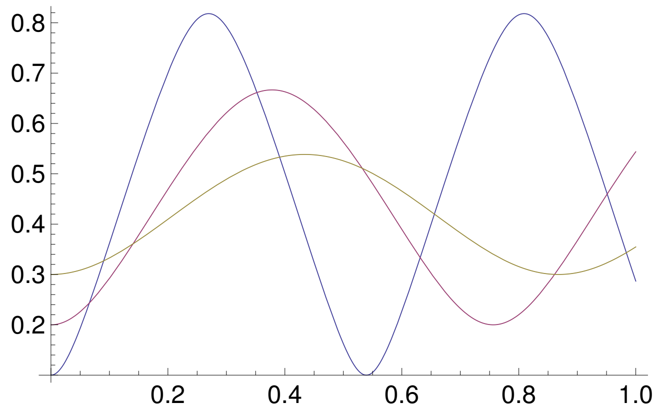
$$x'' = c\left(\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(l-x)^2}\right).$$

Neka je[3] $c = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$ i $l = 1$ .

**(1)** Naći rešenje ove diferencijalne jednačine za $x'(0) = 0$, vrednosti $t$ od 0 do 1 i startne vrednosti $x(0) = x_0 = 0.1, 0.2, 0.3$. Neka su to redom funkcije $f_1(t)$, $f_2(t)$ i $f_3(t)$.

**(2)** Grafički predstaviti funkcije $f_1(t)$, $f_2(t)$ i $f_3(t)$ za $t$ od 0 do 1.

**(3)** Generisati listu vrednosti $\{\{t, f_1(t), f_2(t), f_3(t)\} \mid t = 0, 0.02, 0.04, \ldots, 1\}$ (za vrednosti $t$ od 0 do 1 sa korakom 0.02).




[3]U realnom problemu bi npr. bilo $c = \frac{kq}{m} = 10^6 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Cs}^2}$, $q_1 = 1\mu\mathrm{C}$, $q_2 = 2\mu\mathrm{C}$ i $l = 1\mathrm{m}$.

**7.8.** (Otpor vazduha) Telo mase $m$ slobodno pada u gravitacionom polju i na njega deluje sila otpora vazduha $F = -kv^2$ gde je $v$ brzina tela a $k$ konstanta. Jednačina koja opisuje kretanje tela je

$$v'(t) = g - kv(t)^2$$

gde je $g = 9.81$ gravitaciona konstanta.

**(1)** Numerički rešiti jednačinu kretanja uz početni uslov $v(0) = 0$, za $k = 0, 0.5, 1$ i za $t$ od 0 do 2. Neka su $v_1(t), v_2(t)$ i $v_3(t)$ redom rešenja za $k = 0, 0.5, 1$.

**(2)** Nacrtati grafik rešenja $v_1(t)$, $v_2(t)$ i $v_3(t)$. Tabelarno prikazati vrednosti $v_1(t), v_2(t)$ i $v_3(t)$ za $t$ od 0 do 2 sa korakom 0.1 i eksportovati tabelu u fajl `otporvazduha.dat`.

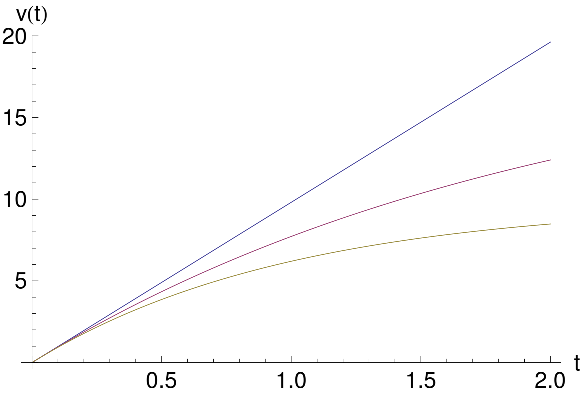
**(3)** Ako je telo pušteno da se kreće sa visine $h_0 = 10$, odrediti na kojoj visini $h_1$ će se nalaziti posle vremena $t_1 = 0.5$. Visina $h_1$ može se odrediti iz jednačine

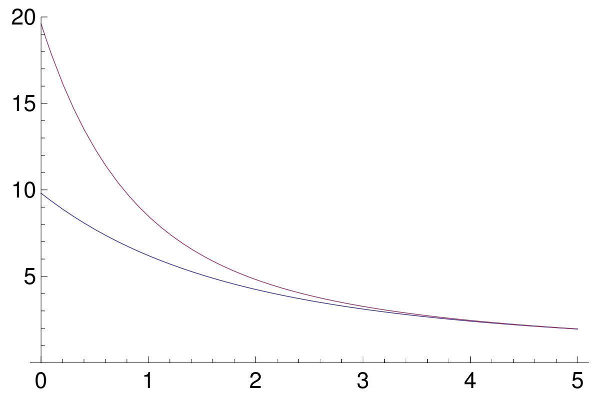
$$h_1 = h_0 - \int_0^{t_1} v(t)dt.$$

Pretpostaviti da je $k = 1$. Integraciju obaviti numerički (funkcija `NIntegrate`).

**(4)** Napisati funkciju `Res[k_]` koja numerički rešava jednačinu kretanja tela za zadatu vrednost konstante $k$, uz početni uslov $v(0) = 0$ i za $t$ od 0 do 2. Neka su $v_1(t), v_2(t)$ i $v_3(t)$ redom rešenja za $k = 0, 0.5, 1$.

**(5*)** Nacrtati grafik brzine tela u zavisnosti od $k$, za $t = 1$ i $t = 2$. Grafik nacrtati za $k$ od 0 do 5.



**7.9.** (Kretanje naelektrisanog tela) Telo mase $m$ i naelektrisanja $q$ kreće se prema drugom telu naelektrisanja $Q$ koje je fiksirano. Kretanje tela je opisano sledećim sistemom diferencijalnih jednačina:

$$x'(t) = v(t), \qquad v'(t) = \frac{c}{x(t)^2}.$$

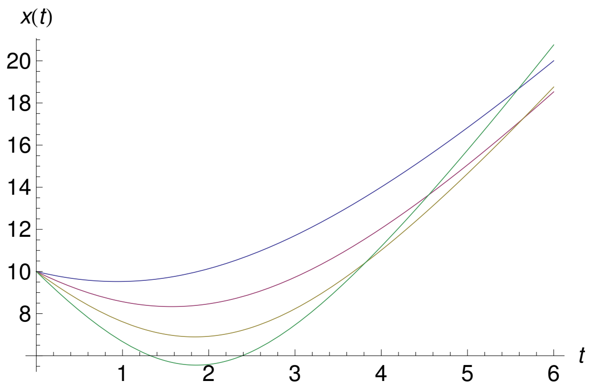
Pretpostaviti da je $c = 100$ ($c = kqQ/m$).

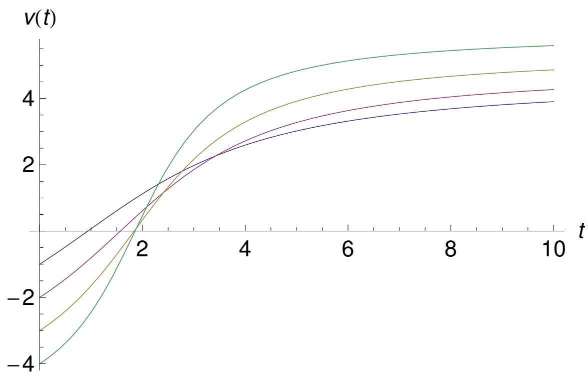
**(1)** Numerički rešiti jednačinu kretanja tela uz početne uslove $x(0) = 10$ i $v(0) = -1, -2, -3, -4$, za $t$ od 0 do 10. Napisati funkciju `Res[v0_]` koja rešava jednačinu kretanja za $x(0) = 10$ i $v(0) = v_0$.

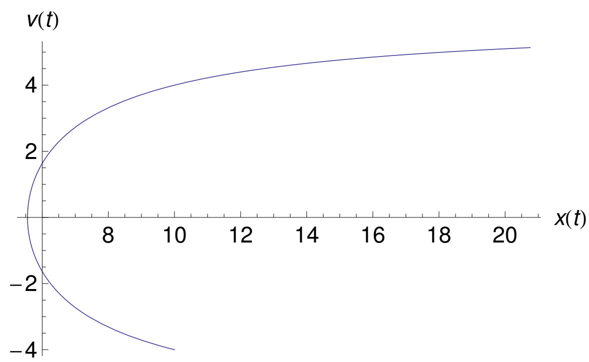
**(2)** Nacrtati grafike rešenja $x(t)$ i $v(t)$, za svako $v(0) = -1, -2, -3, -4$ i za $t$ od 0 do 10.

**(3)** Za $v_0 = -4$ odrediti minimalno rastojanje izmedju ova dva tela tokom kretanja (minimum funkcije $x(t)$) pomoću funkcije `NMinimize`. Uporediti numerički izračunat minimum sa vrednošću koju daje teorija (zakon održanja energije).

**(4)** Grafički prikazati zavisnost $v(t)$ od $x(t)$ za $t$ od 0 do 10 i $v(0) = -4$.



**7.10.** (Problem tri tela) Tri tela jednakih masa postavljena su u tačkama $(-d, 0)$, $(0, 0)$ i $(d, 0)$. Neka su $x_i$ i $y_i$ koordinate a $v_{xi}$ i $v_{yi}$ brzine $i$-tog tela $(i = 1, 2, 3)$. Kretanje prvog tela je opisano sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned}
x_1' &= v_{x1} \\
v_{x1}' &= \frac{x_3 - x_1}{((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2)^{3/2}} + \frac{x_2 - x_1}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{3/2}} \\
y_1' &= v_{y1} \\
v_{y1}' &= \frac{y_3 - y_1}{((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2)^{3/2}} + \frac{y_2 - y_1}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{3/2}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jednačine za ostala tela dobijaju se slično. Početne brzine prvog i trećeg tela su jednake $v$, pravac im je pod uglom $\alpha$ u odnosu na $x$ osu i istog su smera. Početna brzina drugog tela je $2v$, istog je pravca kao i brzina prvog i trećeg, ali suprotnog smera.

**(1)** Izračunati vrednosti koordinata tela i brzine za vrednosti $t$ od 0 do 100. Uzeti da je $v = 0.6355$, $\alpha = 0.5736$ a $d = 1$.

**(2)** Prikazati na jednom grafiku trajektorije kretanja sva tri tela. Šta se može uočiti?

# 8 Razni zadaci

**8.1.** Izračunati vrednosti sledećih konstanti na 30 decimala: $\log_{10} 4$, $e^{4\sqrt{2}}$, $\sin(\cos(\sin(\pi/12)))$, $\arctan(3! + \log_2(3) + \sin(10))$.

**8.2.** Izračunati vrednosti sledećih suma i proizvoda

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2+1}, \quad \prod_{n=1}^{100} (2^n + 1), \quad \sum_{n=1}^{10} \sum_{m=1}^{10} \sin(n+m) \text{ na 10 decimala,}$$

**8.3.** Izvršiti sledeće algebarske transformacije nad izrazima

- Svesti na zajednički imenilac: $\dfrac{1+x}{1+x^2} + \dfrac{1+x^2}{1+x+x^7} + \dfrac{2+3x}{1-x^8}$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{a}{a+nb}$.
- Izmnožiti: $(x+y)(x-y)(x^7+y^5)(x^2+xy+y^2)$, $\quad \displaystyle\prod_{n=1}^{10}(x+n^2y)$, $\quad (x+y)^{10}$.
- Uprostiti: $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} x^i y^j$, $\quad (1-x)\displaystyle\prod_{n=0}^{5}(1+x^{2^n})$.

**8.4.** Izračunati

- Tejlorov polinom 3. stepena funkcije $x^2e^x$ u okolini tačke 0
- $(\sin(x)\sin(2x)\sin(3x))'$, $\quad \left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^5+e^x+\sin(\cos(x))}\right)'$, $\quad \displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}$, $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}/n$.

**8.5.** Rešiti diferencijalne jednačine uz odgovarajuće početne uslove

- $y' + (x+1)y = 3x, \quad y(0) = 0,$
- $y'' + 2y' + 3y = x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

**8.6.** Ako je $T = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ a $P = \dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}$ izračunati $Z = \dfrac{T^2+TP+P^2}{T+P}$. Zameniti u izraz za $Z$ sledeće vrednosti parametara $x$ i $y$: $x = 3, y = 2$; $x = 5, y = 7$; $x = 2.2, y = 3.3$.

**8.7.** Rešiti sledeći sistem linearnih jednačina

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + by + az &= 3 \\ 4x + 5y + abz &= a \end{aligned} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

i diskutovati rešenje u zavisnosti od parametara $a$ i $b$. Zameniti konkretne vrednosti parametara i proveriti dobijeno rešenje.

**8.8.** Približno rešiti jednačinu $e^{ax} = 10 - 3x$ za vrednosti parametra $a = 1, 2, 3, 4, 5$.

**8.9.** Neka je $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ a $g(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$. Naći $f(g(f(x)))$ i uprostiti ovaj izraz.

**8.10.** Napisati funkciju koja generiše listu čiji su elementi uredjeni parovi $(i, f(i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Parametri funkcije su funkcija $f$ kao i broj $n$.

**8.11.** Napisati funkciju koja za unetu vrednost $n$ i **simboličku promenljivu** $x$ generiše sledeći polinom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2 x^k (1-x)^{n-k}.$$

**8.12.** Napisati funkciju koja generiše matricu $A$ čiji su elementi $a_{ij} = i + j$ dimenzija $m \times n$. Ulazni parametri funkcije su $m$ i $n$.

**8.13.** Napisati funkciju koja generiše matricu slučajnih brojeva dimenzija $m \times n$. Generisati dve takve matrice $A$ i $B$ dimenzija $10 \times 10$ i izračunati $AB$, $A^T B$, $(A^2 B^2)_{35}$, kao i zbir svih elemenata matrica $A$ i $B$.

**8.14.** Napisati funkciju koja od ulazne liste oblika $L = \{l_1, l_2, l_3, \ldots, l_{n-1}, l_n\}$ formira listu $L' = \{l_1, l_3, l_5, \ldots, l_{2\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1}, l_2, l_4, \ldots, l_{2\lfloor n/2 \rfloor}\}$ (najpre se poredjaju elementi sa neparnim a zatim i sa parnim indeksima).

**8.15.** Napisati funkciju koja za unete matrice $A, B, C$ i $D$ formira blok matricu oblika

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

**8.16.** (Geometrijsko mesto korena)

**(1)** Napisati funkciju `Koreni` koja vraća listu korena jednačine $s^3 + 5s^2 + 6s + K = 0$ u zavisnosti od parametra $K$. Za rešavanje jednačine koristiti funkciju `NSolve`.

**(2)** Formirati listu $L$ čiji su elementi koreni predhodne jednačine za $K$ od $-20$ do 20, sa korakom 0.01.

**(3)** Formirati liste $L_1, L_2$ i $L_3$ čiji je opšti član $\{\mathrm{Re}(l_i), \mathrm{Im}(l_i)\}$ gde je $l_i$ element liste $L$ na poziciji $i$, tj. $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_{4001}\}$.

**(4)** Grafički predstaviti elemente listi $L_1, L_2$ i $L_3$ (funkcija `ListPlot`). Podesiti da su tačke spojene (opcija `Joined`) u liniju kao i da su boje redom crvena (`Red`), zelena (`Green`) i plava (`Blue`). Debljinu linije podesiti na 0.007 (direktiva `Thickness`). Sve tri slike prikazati na istom grafiku.

**8.17.** Ponoviti predhodni zadatak za jednačinu četvrtog stepena $s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (8+K)s + 2K = 0$.

**8.18.** Napisati funkciju koja unetu listu uredjuje testerasto. Lista $L = \{l_1, \ldots, l_n\}$ je testerasto uredjena ako je $l_1 < l_2 > l_3 < l_4 > \ldots$.

**8.19.** Napisati funkciju koja za uneti broj $n$ računa vrednost izraza $s(n) = \sum_{d|n} \frac{d}{d+1}$. Funkcija `Divisors[n]` vraća listu delioca unetog broja `n`.

**8.20.** Napisati funkciju `PascalRed[n]` koja formira $n$-ti red Paskalovog trougla, odnosno listu $\{\binom{n}{k} \mid 0 \le k \le n\}$. Napisati funkciju `SviNeparni[n]` koja ispituje da li su svi elementi $n$-tog reda Paskalovog trougla neparni brojevi. Napraviti listu svih brojeva $n$ u intervalu 1, 50 za koje je vrednost funkcije `SviNeparni` jednaka `True`.

**8.21.** Napisati funkciju koja za uneti broj $n$ vraća listu svih savršenih brojeva do $n$. Broj $k$ je savršen ako je jednak zbiru svojih delioca koji su manji od $k$.

**8.22.** Napisati funkciju koja za unetu listu brojeva $L$ vraća vrednost sledećeg izraza $S(L) = \sum_{T \subseteq L} \max T$.

**8.23.** Napisati funkciju koja za uneti broj $a$ vraća rešenje jednačine $e^{-x} = ax$. Nacrtati grafik ove funkcije u intervalu $(1, 10)$. Za rešavanje jednačine koristiti funkciju `FindRoot`.

**8.24.** Definisati funkciju $f(x)$ na sledeći način

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Nacrtati grafik ove funkcije.

**8.25.** Napisati funkciju koja za unetu listu $L$ i broj $x$ proverava da li lista $L$ sadrži broj $x$ (tj da li $x \in L$). Funkcija vraća vrednosti `True` i `False` ako $L$ sadrži odnosno ne sadrži broj $x$.

**8.26.** Kažemo da je skup $S$ *slobodan za sumu* ako za svaka dva broja $x, y \in S$ važi $x + y \notin S$. Napisati funkciju koja proverava da li je unet skup $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ slobodan za sumu. Pritom se može koristiti funkcija iz predhodnog zadatka.

**8.27.** Napisati funkciju `PrimeDecimalsE` koja pronalazi prvi niz od $k$ uzastopnih decimalnih cifara broja $e$ koje obrazuju prost broj. Drugim rečima, ako decimalne cifre broja $e$ označimo sa $l_1 = 2$, $l_2 = 7$, $l_3 = 1$, $l_4 = 8$, itd., potrebno je naći minimalno $i$ takvo da je broj $A_i = \overline{l_i l_{i+1} \ldots l_{i+k-1}}$ prost. Ukoliko rešenje ne postoji za $i \leq M$, vratiti praznu listu, u suprotnom vratiti listu čiji je prvi element $i$ a drugi $A_i$. Parametri funkcije su brojevi $k$ i $M$.

**8.28.** *Centralni trinomni koeficijent*, u oznaci $t_n$, je koeficijent uz $x^n$ u razvoju polinoma $(1 + x + x^2)^n$.

1. Napisati funkciju `CentralTrinom[n]` koja računa vrednost $t_n$ na osnovu definicije.
2. Napisati funkciju `CentralTrinomSum[n]` koja računa vrednost $t_n$ na osnovu sume
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k}.$$
3. Napraviti listu vrednosti funkcija `CentralTrinom[n]` i `CentralTrinomSum[n]` za $n = 0, 1, \ldots, 10$ i proveriti da li ove dve funkcije daju iste vrednosti.

**8.29.** Napisati funkciju `HankelFun[a,n]` koja računa *Hankelovu determinantu* $h_n(a) = \det[a_{i+j-1}]_{1 \leq i,j \leq n}$. Napraviti listu vrednosti Hankelove determinante centralnih trinomnih koeficijenata za $n = 0, 1, \ldots, 10$. Šta se iz ove liste može zaključiti?

**8.30.** (Rodjendani) Napisati funkciju `ProbJed[n,M]` koja generiše $M$ listi dužine $n$ čiji su elementi pseudoslučajni celi brojevi od 1 do 365, i odredjuje broj ($N_{jed}$) onih koje imaju barem dva člana jednaka. Funkcija treba da vrati vrednost $N_{jed}/M$ koja predstavlja približnu vrednost za verovatnocu da medju $n$ osoba postoje dve koje imaju rodjendan istog dana. Naći minimalno $n$ takvo da je verovatnoca veca ili jednaka 0.5 (50%).

**8.31.** Uraditi prethodni zadatak pod pretpostavkom da je potrebno da tri osobe imaju rodjendan istog dana.