Glava 6

Kinematika specijalne teorije relativnosti

Kada se pomene reč relativnost većina ljudi ima asocijaciju na Ajnštajna. Manje je poznato da je taj termin zapravo prilično star i da su prve uspešne teorije relativnosti razvili još Galilej i Njutn. Pod relativnošću se zapravo podrazumeva proučavanje toga kako različiti posmatrači (koji se kreću jedni u odnosu na druge) vide isti dogadjaj. Ona relativnost koju je Ajnštajn razvio, manje-više sam, se naziva modernom teorijom relativnosti i može se podeliti na specijalnu i opštu. Specijalna relativnost se odnosi na opisivanje merenja koja vrše posmatrači koji se kreću u različitim **inercijalnim** (neubrzanim) sistemima reference, dok se u okviru opšte teorije relativnosti proučavaju i ubrzano relativno kretanje i gravitacija. Značaj Ajnštajna je u tome što su njegove teorije relativnosti napravile radikalne rezove u predstavama o prostoru i vremenu i dale neka nova i revolucionarna predvidjanja. Iako nisu odmah po formulisanju prihvaćene, danas su njegove teorije[1] potvrdjene sa velikom preciznošću u velikom broju eksperimenata.

Važno je napomenuti da, klasična fizika i klasična relativnost, iako ne potpuno tačne, predstavljaju veoma dobru aproksimaciju za velika tela koja se kreću sporo. Sa druge strane, primena samo klasične fizike u lansiranju satelita i funkcionisanju na primer modernog sistema za globalno odredjivanje položaja (GPS sistema) ili konstruisanju nuklearnih elektrana, bi dovela do značajnih grešaka. Kako u klasičnom limesu (tela veća od submikroskopskih koja se kreću sporije od 1% brzine svetlosti[2]) Ajnštajnova

[1] Osim Ajnštajnovih, postojale su i alternativne teorije koje su medjutim odbačene jer nisu prošle odgovarajuće eksperimentalne testove.

[2] Termin *brzina svetlosti* treba shvatati u smislu brzine svetlosti (c) u vakuumu, ukoliko

relativnost daje iste rezulate kao i klasična fizika, može se reći da ona u stvari u sebi sadrži Njutnovu mehaniku kao specijalan slučaj.

6.1 Brzina svetlosti i zakon sabiranja brzina

Krajem 19. veka, zdanje klasične fizike je bilo uglavnom završeno. Dva najvažnija kamena temeljca, Njutnovi zakoni i Maksvelove jednačine, su, kako je izgledalo, bili dovoljno čvrsto postavljeni. I dok je o Njutnovim zakonima, koji počivaju na pojmovima o apsolutnom prostoru i vremenu, kao osnovi klasične mehanike bilo puno reči do sada, napomenimo da Maksvelove jednačine opisuju elektromagnetne pojave uključujući i svetlost. Kad je reč o njoj, ove jednačine predvidjaju da se svetlost u vakuumu kreće brzinom $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, što predstavlja jednu od osnovnih konstanti u prirodi, ali ne govore ništa o tome u odnosu na koji sistem reference ona iznosi baš toliko.

Za svetlost se tada sa pozdanošću smatralo da je talas,[3] što je bilo dokazano u Jungovom eksperimentu sa difrakcijom svetlosti na dva proreza i u mnogim drugim eksperimentima koji su usledili nakon njega. Do tada je bilo poznato više vrsta talasa, doduše mehaničkih, kojima je za kretanje uvek bio neophodan neki medijum (sredina) koji bi ih prenosio.[4] Na osnovu toga se smatralo da i za svetlost, budući da je talas, mora da postoji neka sredina koja bi služila za prostiranje svetlosnog talasa sa jednog mesta na drugo, u odnosu na koji bi se svetlost prostirala brzinom c. Ta sredina je dobila naziv *etar*.[5]

Ako već imamo medijum, (koji ne vidimo i ne osećamo) koji prenosi svetlosni talas, prirodno je da se zapitamo kakve bi osobine mogao da ima. Obzirom na to da je brzina mehaničkih talasa data izrazom opšteg oblika $u = \sqrt{E/\rho}$, gdje je E, veličina koja opisuje elastične osobine sredine a ρ njena gustina, pretpostavilo se da i za brzinu svetlosnog talasa važi analogan izraz. Kako je za brzinu svetlosti dobijena mnogo veća vrednost nego što je

---

nije naglašeno drugačije. Brzina svetlosti u materijalnoj sredini je uvek manja od c i može biti manja čak i od brzine kretanja naelektrisanih čestica u istoj sredini. Pojava kretanja naelektrisanih čestica u materijalnoj sredini brzinom koja je veća od brzine svetlosti u njoj je poznato pod nazivom efekat Čerenkova.

[3] Time je, izgledalo je, rešena dugogodišnja zagonetka prirode svetlosti. Naime, do tada je preovladavalo mišljenje da Njutnovo čestično objašnjenje ponašanja svetlosti bolje od Hajgensove ideje da je svetlost talas.

[4] Naime, kroz prazan prostor - vakuum, mehanički talasi ne mogu da se prostiru, jer nema šta da ih prenese (na primer zvuk ne može da se prostire kroz vakuum).

[5] Na osnovu ovog bi moglo da se pomisli da je ideja o postojanju etra stara tek nešto vise od 150 godina, medjutim to nije tačno jer se jos u antičko vreme smatralo da postoji neka tvar koja prožima sve, ...

to kod mehaničkih talasa, nametnuo se zaključak da ta hipotetička sredina, koja prožima sve u kosmosu, mora da bude **izuzetno elastična** i **jako male gustine**.[6] Sa druge strane, obzirom da je apsolutno sve uronjeno u nju i da se sva tela kreću kroz etar ne osećajući njegovo postojanje, to je moguće samo ako je trenje izmedju etra i "ostatka" sveta jednako nuli. Drugim rečima, na primer Zemlja kada se kreće kroz etar ne **povlači ga za sobom** zbog ne postojanja trenja.[7] Drugim rečima ta sredina bi trebalo da apsolutno miruje.

Ukoliko postoji, etar sa takvim osobinama, bi bio jako zgodan i za odredjivanje nečega sto se do tada smatralo nemogućim, a to je **apsolutno kretanje**. Naime, ako je reč o sredini koja miruje, onda bismo mogli da u odnosu na nju posmatramo sva kretanja i da odredjujemo njihove apsolutne brzine.

Ako smo već zaključili, na bazi analogije sa mehaničkim talasima, da postoji etar kao medijum za njihovo prenošenje i pripisali mu neko osobine koje bi u tom slučaju morao da poseduje, hajde da vidimo do kojih bi još zaključaka mogla da nas dovede dalja primena (u to vreme nesumnjivo tačne) klasične mehanike na kretanje svetlosti.

U osnovi klasične mehanike se nalazi Galilejev princip relativnosti. Naime, kao što je već više puta pomenuto Njutnovi zakoni važe u inercijalnim sistemima reference. Kada je reč o ovakvim sistemima reference, podsetimo se da, prema ovom principu, ne postoje nijedan od njih koji bi po nečemu bio privilegovan u odnosu na druge - drugim rečima svi su ravnopravni. Direktna posledica ove činjenice je da će rezultat bilo kog mehaničkog eksperimenta biti jednak u svim takvim sistemima.[8] Drugim rečima, kao što je to analizirano u drugoj glavi ove knjige **zakoni mehanike su isti u svim inercijalnim sistemima reference.**

Prirodno je postaviti pitanje da li je moguće primeniti Galilejev princip relativnosti na pojave koje nisu mehaničke, recimo na svetlost.

U tom smislu moramo da se zapitamo u odnosu na koji sistem reference svetlost ima brzinu c? Naime, besmisleno je govoriti o brzini nečega a ne

[6] Iz ovakvog razmatranja je bilo jasno da sredina sa ovakvim osobinama, ako stvarno postoji, mora da izgleda veoma čudno, najčudnije od svih do tada poznatih. Naime, najelastičnije sredine su sredine koje možemo da smatramo praktično idealnim krutim telom. Dakle, ta hipotetička sredina u kojoj se nalazi sve i kroz koju se sve kreće bi morala da bude neka vrsta krutog tela!?

[7] Slično kretanju lopte kroz idealan fluid - fluid bez unutrašnjeg trenja.

[8] Primer koji se najčešće navodi je izvodjenje mehaničkih eksperimenata u vozu koji se kreće uniformno pravolinijski u odnosu na Zemlju i u vozu koji se ne kreće u odnosu na nju.

reći u odnosu na šta se taj objekat kreće tom brzinom.[9]

Polazeći od klasičnog zakona sabiranja brzina, koji je posledica Galilejevog prinicpa relativnosti, dolazi se do zaključka da u različitim sistemima reference i brzina svetlosti mora da ima različitu vrednost.[10] Drugim rečima, izmerena vrednost za brzinu svetlosti c mora da se odnosi na jedan sistem reference koji bi bio vezan za etar i koji bi prema tome mirovao. Ukoliko bi se posmatrač, u odnosu na taj sistem kretao nekom brzinom u u pravcu kretanja svetlosti, onda bi za njega brzina svetlosti morala da bude različita od c, odnosno iznosila bi $c \pm u$, u zavisnosti od toga da li se on kreće ka izvoru svetlosti ili od njega.

Sve negde do pred kraj 19. veka, merna aparatura kojom su raspolagale laboratorije nije bila dovoljno precizna da bi mogla da izmeri malu razliku izmedju c i $c \pm u$, a i metodologija koja se zasnivala na kretanju aparature u laboratoriji nije puno obećavala. Medjutim 1880. godine se došlo na ideju da se u ovu svrhu iskoristi kretanja Zemlje pri rotaciji oko Sunca koje se odvija brzinom od oko $u = 3 \cdot 10^4$ m/s i da se zapravo za Zemlju veže taj pokretni referenti sistem iz koga bi se merila razlika u brzini svetlosti. Situacija u kojoj se na primer Zemlja kreće u susret svetlosti brzinom u ćemo u tom smislu smatrati, na bazi klasičnog zakona slaganja brzina, ekvivalentnom situaciji u kojoj je Zemlja nepokretna a svetlost se ka njoj kreće brzinom $c + u$.[11] Odredjivanje brzine svetlosti u tim uslovima je identično odredjivanju brzine aviona koga nosi vazdušna struja, odnosno vetar. Na taj način, u ovom slučaju možemo situaciju da predstavimo analognom situaciji u kojoj je Zemlja (i aparatura koja se nalazi na njoj) statična a da se etar kreće ka njoj ili od nje (zavisno od doba godine kada strujanje etra promeni smer).

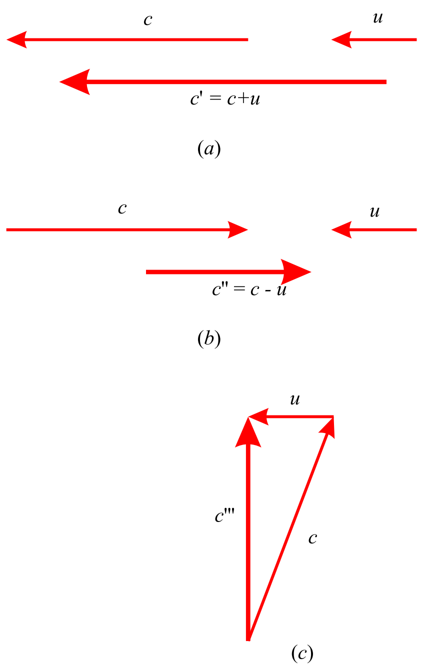
Dalja merenja su se, prema tome, svodila na odredjivanja brzine vetra kojim etar "duva" u Zemlju prilikom njenog kretanja kroz njega brzinom u. U tom slučaju, izmerena brzina svetlosti će imati maksimum $c' = c + u$, kada se svetlost kreće "niz vetar" (slika 6.1), biće minimalna $c'' = c - u$ kada se svetlost kreće "uz vetar", a imaće neku vrednost $c''' = \sqrt{c^2 - u^2}$, koja je izmedju ove dve, kada se meri u smeru normalnom na "vetar".

Ukoliko se pretpostavi da Sunce miruje u odnosu na etar, brzina strujanja etra koji je ekvivalentan kretanju Zemlje oko Sunca će biti upravo jednaka

[9]Ovo su činjenice na koje se već na prvim časovima o kretanju ukazuje učenicima.

[10]Ima li se u vidu da je brzina svetlosti u vakuumu zadata relacijom (9.19), odnosno definisana vrednostima električne i magnetne konstante vakuuma, to bi značilo da se ove vrednosti menjaju pri prelasku iz jednog inercijalnog sistema u drugi. To ne zvuči kao da ima previše smisla.

[11]Brzina u bi bila relativna brzina etra u odnosu na Zemlju, koji "nosi" i svetlost koja se (u odnosu na njega) kreće brzinom c u odnosu na njega.



Slika 6.1: Razlika u brzini svetlosti u zavisnosti od načina kretanja "vetra".

orbitalnoj brzini Zemlje, odnosno oko $3 \cdot 10^4$ m/s. Kako je $c = 10^8$ m/s, očekivalo se da odstupanja od brzine svetlosti koja su u ovom slučaju reda veličine $u/c = 10^{-4}$, mogu da se registruju prilikom merenja "uz vetar" i "niz vetar". Merenja su vršena Majkelsonovim interferometrom koji je imao mogućnost da izvrši merenje potrebne tačnosti, medjutim, svi pokušaji da se odredi ovaj uticaj na brzinu svetlosti (a time i pokaže postojanje apsolutnog referentnog sistema vezanog za etar) su bili neuspešni.

Negativan rezultat je ukazivao na moguću teorijsku kontradikciju izmedju Maksvelove elektrodinamike i Njutnove mehanike. Zaključi koji slede iz ovih razmatranju su da

- ili osnovni zakoni elektromagnetizma nisu isti u svim intercijalnim sistemima reference,
- ili Galilejev zakon sabiranja brzina nije tačan.

Ukoliko je prvi zaključak tačan, morao bi da postoji jedan sistem reference u kojem je brzina svetlosti c a brzine svetlosti koje mere posmatrači koji se nalaze u drugim inercijalnim sistemima moraju onda da bude veće ili manja od ove, u zavisnosti od relativnog kretanja sistema (u skladu sa Galilejevim transformacijama). Ukoliko je tačan drugi zaključak, morale bi da se razmotre predstave o apsolutnom prostoru i vremenu koje predstavljaju osnovu klasične mehanike.

6.2 Majkelson-Morlijev eksperiment

Najpoznatiji eksperiment[12] koji je osmišljen da izmeri očekivanu malu promenu u brzini svetlosti, prvi put je izveo jedan drugi Albert, Albert Majkelson 1881. godine.[13]

Eksperiment je dizajniran tako da se u njemu meri efekat kretanja Zemlje u odnosu na hipotetički etar. Uredjaj koji je u tu svrhu iskorišćen je Majkelsonov interferometar (slika 6.2). U njemu, snop svetlost koji emituje neki svetlosni izvor nailazi na polupropustljivo ogledalo O, koje je postavljeno pod uglom od 45^o u odnosu na pravac prostiranja snopa. Polupropustljivo

[12] Osim ovog eksperimenta postvaljen je niz drugih koji su imali isti cilj. Samo neki od fizičara koji su se bavili ovim problemom su Fizeau (1860.), Mascart (1872.), Lord Rayleigh (1902). Njihovi eksperimenti su imali za cilj da izmere promene u indeksu prelamanja dielektrika izazvano zemljinim kretanjem kroz etar. Troud i Noble (1903.) su pokušali da odrede promenu u nalektrisanju ploča kondenzatora usled kretanja kroz etar.

[13] Eksperiment je kasnije ponovio više puta u saradnji sa Edvardom Morlijem pa je zato u nauci poznat pod nazivom Majkelsono-Morlijev eksperiment.

ogledalo ima za zadatak da upadni snop svetlosti pocepa na dva koji će se nadalje kretati različitim pravcima. Jedan snop nastavlja da se kreće u istom pravcu i smeru, odnosno ka ogledalu O_2 a drugi se reflektuje i kreće se dalje ka ogledalu O_1. Recimo da je krak 2 interferometra u početku bio postavljen u pravcu kretanja Zemlje po orbiti. Kao što je već rečeno, kretanje Zemlje kroz etar brzinom u je ekvivalentno strujanju etra prema Zemlji brzinom istog intenziteta ali suprotnog smera. Strujanje etra u smeru suprotnom od realnog kretanja Zemlje, dovodi do toga da će brzina svetlosti u sistemu reference vezanom za Zemlju biti $c-u$ kada se svetlost kreće ka ogledalu O_2 a $c+u$ nakon refleksije o njega.[14]

Dva svetlosna snopa, odbijena od ogledala O_1 i O_2 kada se sretnu interferiraju i daju sliku koja se sastoji od niza naizmeničnih tamnih i svetlih traka. Interferenciona slika je takodje posmatrana i kada je interferometar zarotiran za 90^o. Rotacija je trebalo da izmeni interferencionu sliku za mali ali merljivi iznos jer je usled rotacije promenjena brzina strujanja etra duž kraka interferometra. Merenja su medjitim pokazala da nema nikakve promene u interferencionoj slici. Eksperiment je ponavljan više puta tokom kalendarske godine jer se očekivalo da je promenjen i smer a i intenzitet brzine strujanja etra oko Zemlje ali je rezulat uvek bio isti: **nije primećena promena interferencione slike koja bi po veličini odgovarala teorijskim predvidjanjima.**

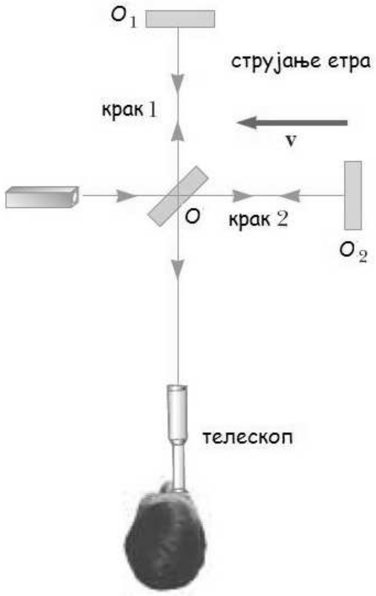
Negativan rezultat Majkelson-Morlijevog eksperimenta nije kontradiktoran samo hipotezi o postojanju etra, već je pokazao da je nemoguće odrediti brzinu apsolutnog kretanja Zemlje u odnosu na etar kao referentno telo.[15] U narednim godinama, u stepenu kako je upoznavana prava priroda svetlosti, se pokazalo da se ideja etra kao prenosioca svetlosnih talas stvarno može odbaciti. Danas se svetlost smatra elektromagnetnim talasom kome za prostiranje nije potreban medijum prenosnik.[16]

Razmotrimo postavku Majkelson Morlijevog eksperimenta. Pretpostavimo da oba kraka interferometra imaju istu dužinu L. Kao što je već naglašeno, pod pretpostavkom da postoji strujanje etra, brzina svetlosti duž kraka 2 interferometra je $c-u$, kada se svetlost približava ogledalu O_2, a $c+u$ nakon reflektovanja svetlosti o ogledalo. Na taj način, vreme potrebno svetlosti da predje put L, krećući se ka ogledalu iznosi $L/(c-u)$, a od ogledala $L/(c+u)$.

[14]Podsetimo se da je c brzina svetlosti u sistemu reference vezanom za etar.

[15]Kao što ćemo videti u narednim poglavljima, Ajnštajn je uveo jedan postulat koji potpuno drugačije interpertira negativan rezultat ovog eksperimenta, zadirući zapravo u njegovu teorijsku postavku.

[16]Posledica toga je da je etar čiji je jedini razlog postojanja bio da prenosi svetlost, postao nepotreban.



Slika 6.2: Majkelson-Morlijev interferometar.

Ukupno vreme potrebno svetlosti da ode do ogledala i vrati se, prema tome je

$$t_1 = \frac{L}{c+u} + \frac{L}{c-u} = \frac{2Lc}{c^2-u^2} = \frac{\frac{2L}{c}}{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{6.1}$$

Razmotrimo sada kretanje svetlosnog snopa duž kraka 1, koji se nalazi pod pravim uglom u odnosu na strujanje etra. Kako je brzina svetlosti u odnosu na Zemlju u tom slučaju $\sqrt{c^2-u^2}$, vreme potrebno svetlosti da ode do ogledala O_1 je $L/\sqrt{c^2-u^2}$. Vreme potrebno da se vrati nazad je jednako, pa je ukupno vreme za putovanje svetlosti u pravcu kraka 1

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{6.2}$$

Razlika ova dva vremena je

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c}\left[\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right]. \tag{6.3}$$

Kako je $u^2/c^2 << 1$, prethodni izraz može da se uprosti razvojem binoma, uz zanemarivanje članova drugog i višeg reda,

$$(1-x)^n \approx 1 - nx, \quad x << 1. \tag{6.4}$$

Kako je $x = u^2/c^2$, n je u prvom slučaju -1 a u drugom $-\frac{1}{2}$, pa se za razliku vremena dobija

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{Lu^2}{c^3}. \tag{6.5}$$

Ova razlika u vremenima koja su potrebna zracima da dodju na zaklon, izaziva njihovu faznu razliku odnosno ima za posledicu stvaranje interferencione slike na njemu. Kada se interferometar zarotira za 90^{O}, zraci zamenjuju mesta pa će doći do promene u interferencionoj slici. To će rezultirati duplo većom vremenskom razlikom ova dva zraka od one date relacijom (6.5). Usled toga će razlika puteva koje su prešli zraci biti

$$\Delta d = c(2\Delta t) = \frac{2Lu^2}{c^2}. \tag{6.6}$$

Promena u putu za jednu talasnu dužinu dovodi do pomeranju u interferencionoj slici za jednu svetlu traku. Na taj način pomeranje interferencione slike zavisi od odnosa putne razlike i i talasne dužine svetlosti

$$S = \frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{2Lu^2}{\lambda c^2}. \tag{6.7}$$

U eksperimentima koje su vršili Majkelson i Morli, svaki zrak je bio reflektovan više puta o ogledalo tako da je efektivno prelazio put od 11 metara. Na taj način će razlika u putevima izmedju zraka biti

$$\Delta d = \frac{2 \cdot 11 \text{ m}(3 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}. \tag{6.8}$$

Ta putna razlika je trebalo da prouzrokuje merljivi pomeraj u interferencionoj slici. Ukoliko se u eksperimentu koristi svetlost talasne dužine 500 nm, predvidjeni pomeraj u interferencionoj slici je

$$S = \frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{2,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \approx 0,44. \tag{6.9}$$

Uredjaj koji su koristili u eksperimentu Majkelson i Morli je mogao da detektuje pomeraj u interferencionoj slici reda veličine 0,01. Medjutim, na njihovo iznenadjenje, nije primećena nikakva promena. Nakon toga, eksperiment je ponovljen mnogo puta, od strane mnogih naučnika i pod različitim uslovima, ali nikakvo pomeranje nije uočeno. Nužno je sledio zaključak da kretanje Zemlje u odnosu na etar ne može biti registrovano.

Mnogo truda je uloženo da se objasni negativan rezultat ovog eksperimenta tako da se sačuva koncept etra i Galilejev zakon sabiranja brzina. Veoma brzo se medjutim pokazivalo da su svi ti pokušaji bili pogrešni.

I tako je bilo sve do 1905. godine, kada je Ajnštajn objavio svoj prvi rad o specijalnoj relativnosti u kome je pošavši od radikalno novih ideja pokazao da postojanje etra zapravo nije neophodno. U ovom radu je, analizirajući Maksvelove jednačine, činjenicu da one za brzinu svetlosti predvidjaju c, proglasio postulatom svoje specijalne teorije relativnosti.[17]

6.3 Ajnštajnov princip relativnosti

Ajnštajn je zapravo, razmišljajući o tome da se svetlost (u vakuumu) kreće uvek brzinom c, zaključio da postoji kontradikcija izmedju tog predvidjanja i Njutnove mehanike, u kojoj se brzine sabiraju kao vektori. Ako je ovo primenljivo i za elektromagnetne talase, onda bi dva posmatrača koja se kreću raznim brzinama registrovali različite brzine kretanja svetlosti.[18]

Deo Njutnove mehanike i klasične relativnosti u ovim radovima ipak nije doveden u sumnju. Naime, jasno je da se sve brzine mere u odnosu na neki sistem reference. Najprostiji sistemi reference su oni koji se ne kreću ubrzano i koji ne rotiraju. Njutnov prvi zakon (zakon inercije) važi u takvim

[17]Interesantno je istaći da je Ajštajn o relativnosti ozbiljno razmišljao od svoje 16. godine a da ju je formulisao u periodu svog života kada je bio zapošljen kao službenik nižeg ranga u jednom patentnom birou u Bernu u Švajcarskoj. Što je još interesantnije on je iste godine objavio još četiri rada. Osim relativnosti u njima je bilo reči o još dve značajne teme - o Braunovom kretanju (rad koji spada u najcitiranije u istoriji moderne fizike) koji je ukazivao na to kako u eksperimentima može biti odredjena veličina atoma, a druga tema se ticala objašnjena fotoefekta. Objašnjenje koje je on ponudio je bitno uticalo na zasnivanje kvantne mehanike. Za ovaj rad, Ajnštajn je 1921. godine dobio Nobelovu nagradu.

[18]U stvari, on je pokušao da shvati kako bi svetlosni talas izgledao nekome ko se kreće istom brzinom kao i sam talas. Ako bi takvo kretanje bilo moguće, ovaj talas (koji predstavlja spregnuto oscilovanje električnog i magnetnog polja pod pravim uglom u odnosu na pravac prostiranja talasa) bi bio stacionaran (nepromenljiv u vremenu) za posmatrača, sa električnim i magnetnim poljem čiji bi intenziteti imali različite vrednosti na različitim udaljenostima od njega pri čemu se one ne bi menjale sa vremenom. Ajnštajn je medjutim znao da tako nešto Maksvelova elektrodinamika ne predvidja. Zaključio je da su ili Maksvelove jednačine pogrešne, ili da je nemoguće kretati se brzinom svetlosti. Ukoliko su jednačine ipak tačne jasno je da to ukazuje na nemogućnost kretanja brzinom c sa jedne strane, a sa druge da je brzina svetlosti u vakuumu jednaka za sve posmatrače. Kao posledica toga se odmah nameće zaključak da za svetlost u tom slučaju ne važi klasičan zakon sabiranja brzina.

sistemima, koji se prema tome nazivaju **inercijalni sistemi reference**. Posmatrano iz njih, tela koja miruju ostaju u stanju mirovanja, a ona koja se kreću konstantnim brzinama po pravoj liniji nastavljaju da se tako kreću sve dok na njih ne deluju spoljašnje sile.

Štaviše zakoni fizike imaju najprostiju formu u inercijalnim sistemima reference. Na primer, sistem reference koji je vezan za Zemlju je samo približno inercijalan. Obzirom da se Zemlja ne kreće uniformno i pravolinijski, može da se primeti da u njoj postoji dodatna sila[19] (Koriolisova), koja komplikuje opisivanje kretanja tela u odnosu na Zemlju.[20] I što je još važnije, zakoni fizike imaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference, jer ne postoji ni jedan koji bi bio po bilo čemu privilegovan.

Ajnštajnova specijalna teorija relativnosti počiva na dva postulata

1. **Prinicip relativnosti**: Zakoni fizike imaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference.

2. **Princip konstantnosti brzine svetlosti**: Svetlost se kroz vakuum kreće brzinom $c = 3\cdot 10^8$ m/s koja je ista u svim inercijalnim sistemima reference, nezavisno od relativne brzine izvora svetlosti i posmatrača.

Prvi postulat predstavlja tvrdjenje da su **svi** zakoni fizike (iz oblasti mehanike, elektriciteta, optike, magnetizma, termodinamike, ...) isti u svim referentnim sistemima koji se, jedni u odnosu na druge, kreću konstantnim relativnim brzinama. Ovaj postulat je generalizacija Galilejevog principa relativnosti koji se odnosi samo na mehaničke pojave.

Sa eksperimentalne tačke gledišta, Ajnštajnov princip relativnosti kazuje, da svi eksperimenti (na primer merenje brzine svetlosti) izvršeni u laboratoriji koja je u stanju mirovanja, mora da daju iste rezultati i kada se izvrše u laboratoriji koja se kreće konstantnom brzinom u odnosu na onu koja miruje. Drugim rečima nema privilegovanih sistema, te prema tome nije moguće definisati apsolutno kretanje.

Drugi postulat je u odredjenom smislu povezan sa prvim. Naime, ako brzina svetlosti[21] ne bi bila ista u svim sistemima reference, njeno merenje bi moglo da se iskoristi za pravljenje razlika izmedju sistema, odnosno ne bi bili svi ravnopravni, što je u kontradikciji sa prvim postulatom.

---

[19] U tom slučaju naime, ukupna sila koja deluje na telo nije jednaka proizvodu mase tela m i ubrzanja $\vec{a}$ već se mora dodati još jedan sabirak što komplikuje opsivanje kretanja posmatranog tela.

[20] Ova sila izmedju ostalog izaziva i dodatnu rotaciju orkanskih vetrova, ...

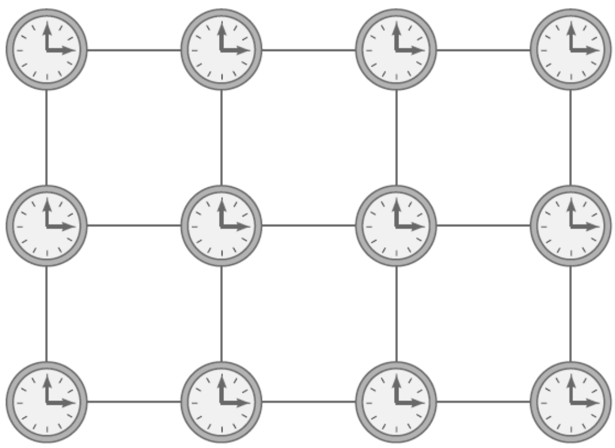
[21] Takodje treba istaknuti da je brzina svetlosti u vakuumu maksimalna brzina kojom se može preneti interakcija.

Istaknimo još i to da je postojanje maksimalne brzine prostiranja interakcije (ili signala) u tesnoj vezi sa problemom istovremenosti dogadjaja za posmatrače u različitim sistemima reference, što je direktno povezano sa pitanjem da li je proticanje vremena isto u svim inercijalnim sistemima.

Iako je Majkelson-Morlijev eksperiment izvršen pre nego što je Ajnštajn publikovao svoj rad o relativnosti, nije potpuno jasno da li je bio upoznat sa detaljima eksperimenta. Medjutim, u skladu sa postulatima specijalne teorije relativnosti, jasno je da je osnovna premisa eksperimenta (bazirana na klasičnom zakonu sabiranja brzina i na koncepciji apsolutnog prostora i vremena) pogrešna pa je tako i negativan rezultat eksperimenta logičan.

6.4 Posledice specijalne teorije relativnosti

Pre upuštanja u posledice Ajnštajnovih postulata, razmotrimo na koji način posmatrač koji se nalazi u nekom sistemu reference opisuje dogadjaj. Svaki dogadjaj je, u datom referentnom sistemu S odredjen trima prostornim (x, y, z) i jednom vremenskom koordinatom t.[22] Jasno je da različiti posmatrači, iz svojih sistema reference opisuju iste dogadjaje različitim koordinatama. Sistem reference iz koga opisujemo dogadjaje se u principu sastoji od koordinatne mreže i skupa časovnika koji se nalaze u tačkama preseka mreže, kao što je pokazano na slici 6.3 u dve dimenzije.



Slika 6.3: Koordinatna mreža sa sinhronizovanim satovima.

[22]Naime, za svaki dogadjaj, kao i u svakodnevnom životu, moramo da znamo gde se desio i kada je to bilo.

Kako u datom sistemu reference ima više časovnika, oni moraju biti sihhronizovani.[23] To se može uraditi uz pomoć svetlosnih signala na sledeći način. Pretpostavimo da se u tački koja predstavlja koordinatni početak nalazi posmatrač sa glavnim satom i da je, kada je na njegovom satu bilo $t = 0$ s, poslao svetlosni puls. Pulsu je potrebno vreme r/c da dodje do sata koji je na rastojanju r od koordinatnog početka. Prema tome, taj sat je sinhronizovan sa glavnim samo ukoliko pokaže r/c u trenutku kada puls stigne do njega. Ovakva procedura sinhronizacije[24] podrazumeva naravno činjenicu da se svetlost kreće jednakom brzinom u svim pravcima i u svim sistemima reference. Posmatrač koji se nalazi u jednom sistemu reference S će neki dogadjaj okarakterisati skupom prostorno vremenskih koordinata (x, y, z, t) koji odgovaraju njegovoj koordinatnoj mreži i satovima koji su sinhronizovani u njoj. Drugi posmatrač, koji se nalazi u nekom drugom sistemu reference S' će istom dogadjaju pripisati druge prostorne vremenske koordinate (x', y', z', t').

6.4.1 Istovremenost u Ajnštajnovoj relativnosti

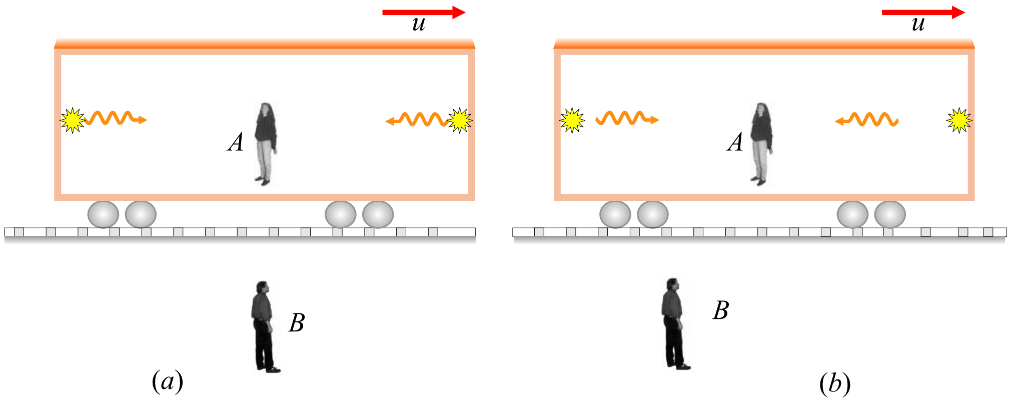
Jedna od osnovnih premisa Njutnove mehanike je da postoji univerzalna vremenska skala koja je ista za sve posmatrače. Iz toga sledi da ako su u jednom sistemu reference dva dogadjaja istovremena, onda su oni istovremeni u svim sistemema reference koji se u odnosu na njega kreću (ma koliko velikom) konstantnom brzinom. Medjutim, ukoliko važe Ajnštajnovi postulati, *dva dogadjaja koja su istovremena u jednom sistemu reference nisu istovremena u drugom.*

Pretpostavimo da želimo da izmerimo vremenski interval izedju dva bljeska svetlosti proizvedena blic lampama koje se nalaze na krajevima vagona (slika 6.4).

Posmatrač A se nalazi tačno na sredini vagona, to jest podjednako udaljen od obe lampe, a vagon se kreće konstantnom brzinom u u odnosu na posmatrača B. Blic lampe emituju svetlost u trenutku kada posmatrač A prolazi kraj posmatrača B, odnosno u trenutku kada su obojica podjednako udaljena od krajeva vagona. Pretpostavimo da posmatrač B svojim satom meri vreme dolaska signala do njega. U skladu sa drugim postulatom, u

[23] Da bi imalo smisla da služe za očitavanje vremena.

[24] Važno je takodje istaći da ovakav način sinhronizacije časovnika ima za posledicu da su ispunjena dva uslova: (a) *uslov simetrije* - ako je časovnik koji se nalazi u tački A sinhron sa časovnikom koji se nalazi u tački B, onda je i časovnik u B sinhron sa časovnikom u A, (b) *uslov tranzitivnosti* - ako je časovniku u A sinhron sa časovnikom u B, a časovnik u B sa časovnikom u C, tada je i časovnik u A sinhron sa časovnikom koji se nalazi u tački C.



Slika 6.4:

odnosu na njega, svetlost prelazi jednaka rastojanja jednakom brzinom[25] i on će zaključiti da su dogadjaji emitovanja svetlosti istovremeni.

Razmotrimo sada šta se sa njegovog stanovišta dešava u sistemu reference u kome se nalazi posmatrač A. Analizirajući način kretanja vagona, obzirom da se posmatrač A kreće na desno (ka jednoj lampi), time smanjuje rastojanje koje svetlost treba da predje da bi došla do njega. Kako se svetlost kreće brzinom c u odnosu na oba posmatrača, ali posmatrač B ostaje na jednakom rastojanju izmedju tačaka iz kojih su emitovani svetlosni pulsevi, dok se A približava desnoj tački, zaključuje da će postojati razlika u vremenu pristizanja bljeskova svetlosti do posmatrača A.[26]

Na osnovu izvršene analize nameće se zaključak da *istovremenost ima relativan karakter*, odnosno da *u raznim inercijalnim sistemima vreme teče različito.*

Primetimo da su u analizi korišćena samo dva principa: smatralo se da se oba sistema reference ravnopravna (princip relativnosti) i da se svetlost u svim pravcima kreće istom brzinom (princip konstantnosti brzine svetlosti).

[25]Na brzinu svetlosti prema ovom postulatu ne utiče kretanje izvora koji ju je emitovao.

[26]To narušenje istovremenosti pomenuta dva dogadjaja je vezano za to kako ih vidi posmatrač B. Gledano sa stanovišta posmatrača A dogadjaji su za njega takodje istovremeni, što je u skladu sa postulatima Ajnštajnove teorije relativnosti. Ukoliko bi na primer on registrovao da su ovi dogadjaji neistovremeni, mogao bi na osnovu toga da zaključi da li se njegov sistem kreće ili ne, a prvi postulat upravo to zabranjujue - egzistenciju fizičkog ogleda koji bi po nečemu omogućio da se odredi karakter kretanja inercijalnog sistema reference. U ovome nema nikakve kontradikcije jer se radi o uporedjivanju intervala vremena izmedju dogadjaja koji se desio u **istoj tači prostora**, npr u tački prostora u kojoj se nalazi posmatrač A. U nju sa stanovišta njega signali stižu istovremeno, dok za posmatrača u odnosu na koga se on kreće to više nije tako.

Neko bi mogao da se zapita a da li su *stvarno* pomenuti dogadjaji istvoremeni ili ne, medjutim to pitanje nema smisla. Razlog je što odgovarati šta se *u stvari* dešava, značilo bi da je izabran neki sistem reference koji je po nečemu privilegovan u odnosu na druge.

Stožer relativnosti (i Galilej-Njutnove i Ajnštajnove) je da *bilo koji sistem reference može da se koristi za opisivanje dogdjaja.* Kao što je već više puta rečeno, **ne postoje privilegovani sistemi reference.**

Činjenica da posmatrači koji se nalaze u različitim referentnim sistemima, svojim časovnicima i lenjirima mere različite vremenske intervale i dužine nije u suprotnosti sa tvrdjenjem o ravnopravnosti sistema reference. Ravnopravnost se svodi zapravo na to da svi posmatrači moraju da se saglase oko forme osnovnih zakona fizike koja mora biti ista za sve posmatrače koji se kreću uniformno. Na primer, relacija $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ u sistemu S mora da ima istu formu $d\vec{p}'/dt' = \vec{F}'$ u sistemu S' koji se kreće uniformno u odnosu na sistem S. [27]

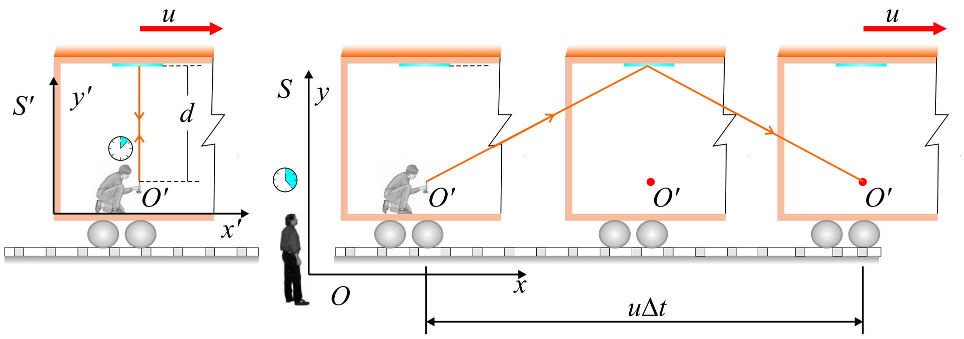
6.4.2 Dilatacija vremena

Razmatranje merenja intervala vremena i problema istovremenosti dovodi do jednog veoma važnog relativističkog efekta koji se naziva dilatacija vremena. On se ispoljava u različitim rezultatima merenja intervala vremena izmedju dogadjaja, od strane dva posmatrača koji se kreću jedan u odnosu na drugoga uniformno.

Proanalizirajmo vremenske intervale izmedju dva dogadjaja merena u "pokretnom" S' i "nepokretenom" sistemu reference S[28] na primeru merenja vremena potrebnog svetlosnom pulsu da predje odredjeno rastojanje (slika 6.5). Neka je ogledalo je fiksirano za plafon vagona a putnik koji je u stanju mirovanja u odnosu na vagon drži laser na udaljenosti d od ogledala. U nekom trenutku, laser emituje svetlosni puls usmeren ka ogledalu (dogadjaj 1), koji se nakon nekog vremena, merenog u tom sistemu, vraća ka laseru. Neka je na satu u S' za interval vremena izmedju ta dva dogadjaja izmereno vreme $\Delta t'$. Kako se svetlosni puls kreće brzinom c i prelazi put $2d$ (ka

[27] Ovo je činjenica koja je takodje isticana prilikom analize Galilejevog principa relativnosti. Razlika je u tome što se sada tvrdi da ta činjenica važi i za velike brzine kretanja i za sve fundamentalne (ne samo mehaničke) fizičke zakone. U tom smislu i Maksvelove jednačine, kao osnova klasične elektrodinamike, moraju imati isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference.

[28] Napomenimo da ni jedan od posmatrača ne zna (nema način da utvrdi) da li se kreće ili ne. Tačnije, svako od njih je u stanju mirovanja u sopstvenom sistemu reference. Iz toga razloga su i sistemi nazvani "pokretni" i "nepokretni".



(a)

(b)

Slika 6.5: (*a*) Ogledalo fiksirano za plafon vagona i svetlosni signal koji šalje posmatrač koji miruje u odnosu na vagon. (*b*) U odnosu na stacionarnog posmatrača O koji se nalazi pored pruge, vagon se kreće brzinom u.

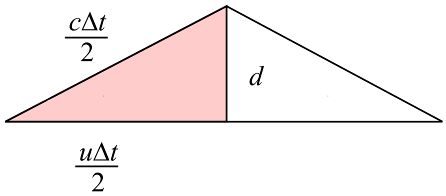
ogledalu i nazad), ovaj interval vremena je

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}. \tag{6.10}$$

Podsetimo se da je za njegovo merenje (u sistemu S') dovoljan **samo jedan sat**, koji se sve vreme **nalazi na istom mestu** sa koga je emitovan i na koje se potom vraća svetlosni puls.

Razmotrimo sada kako isti par dogadjaja izgleda posmatraču iz sistema S (slika 6.5 (*b*)). Za posmatrača koji se nalazi u tom sistemu, ogledalo i laser se kreću na desno brzinom u usled čega niz ova dva dogadjaja za njega izgleda drugačije. Dok svetlost stigne do ogledala, ono se pomeri na desno na rastojanje $u\Delta t/2$, gde je Δt vreme potrebno svetlosnom pulsu da polazeći iz tačke O' nakon odbijanja od ogledala ponovo dodje u nju, ali mereno iz sistema S u odnosu na koji se vagon kreće uniformno brzinom u. Obzirom na ovakvo kretanje vagona i ogledala, on zaključuje da će svetlostni puls doći do ogledala jedino ukoliko napusti laser pod nekim uglom u odnosu na vertikalu. Uporedjivanjem situacija (*a*) i (*b*) na pomenutoj slici, vidi se da gledano iz njegovog sistema reference svetlost mora da predje **veći put** da bi došla nazad do lasera.

Važno je takodje napomenuti da on odgovrajuća vremena očitava na dva stacionarna časovnika, jedan se nalazi na lokaciji gde eksperiment započinje (emitovanje signala) a drugi na lokaciji gde se završava (prijem signala). U tom smislu on će uporedjivati pokazivanje jednog pokretnog sata koji se nalazi u vagonu, na mestu odašiljanja i primanja signala, sa pokazivanjem dva nepokretna časovnika koja se nalaze u njegovom sistemu reference.



Slika 6.6:

U skladu sa postulatom o konstantnosti brzine svetlosti, za oba posmatrača se ona kreće jednakom brzinom c. Kako mereno iz sistema S, svetlost prelazi veći put, interval vremena Δt, izmeren izmedju dogadjaja 1 i 2 je veći od intervala vremena $\Delta t'$ koji je izmerio posmatrač koji se nalazi u sistemu S'. Da bi dobili vezu ova dva intervala zgodno je iskoristiti pravougli trougao prikazan na slici 6.6. Primenom Pitagorine teoreme

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2 + d^2. \tag{6.11}$$

za Δt se dobija

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2d}{c\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{6.12}$$

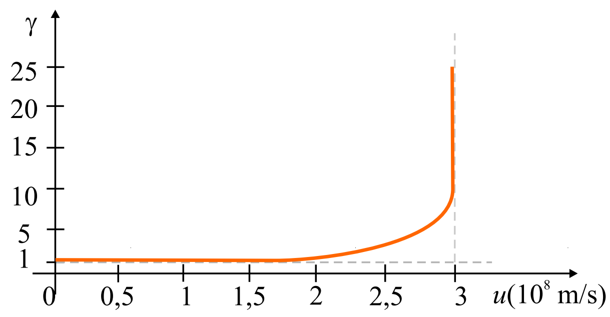
odnosno, uz korišćenje (6.10)

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t', \tag{6.13}$$

gde je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{6.14}$$

Kako je faktor γ uvek veći od jedinice, ovaj rezultat pokazuje da je vremenski interval Δt, izmeren od strane posmatrača u odnosu na koji se uredjaj koji je ispuštao svetlosne signale kretao, veći od vremenskog intervala $\Delta t'$ izmerenog u sistemu reference vezanom za uredjaj. Kako posmatrač u odnosu na kojeg se uredjaj kreće meri veći vremenski interval, efekat je nazvan **dilatacija vremena**. Drugim rečima vreme u pokretnim sistemima teče sporije jer svi časovnici, uključujući i biološke, pokazuju kraće vremenske intervale.



Slika 6.7: Grafik zavisnosti γ od brzine kretanja tela v. Sa približavanjem brzine tela brzini svetlosti, faktor γ rapidno raste.

Vremenski interval $\Delta t'$ meren u sistemu S' koji se kreće zajedno sa instrumentom koji je korišćen za merenje, se naziva sopstvenim vremenskim intervalom i često označava sa Δt_0 jer je mereno u sistemu reference u kome se posmatrano telo-instrument ne kreće. U suštini **sopstveno vreme je vremenski interval izmedju dva dogadjaja meren od strane posmatrača za koga se oni dešavaju na istom mestu u prostoru**. U tom smislu se sopstveno vreme uvek može meriti jednim satom koji miruje u odnosu na referentni sistem u kojem se dešavaju dogadjaji. Ukoliko se taj posmatrani sat kreće u odnosu na nas (a mi se nalazimo u sistemu S), on počinje da zaostaje (kuca sporije) za sinhronizovanim satovima koji se nalaze u čvorovima koordinatne mreže našeg inercijalnog sistema S. Stepen zaostajanja je odredjen faktorom γ u skladu sa jednačinom (6.14). Iz svega iznetog je jasno da je ovakav zaključak tačan za mehaničke časovnike, medjutim on se može generalizovati i na sve fizičke procese (uključujući hemijske i biološke) koji postaju usporeni u odnosu na njihovo trajanje u "nepokretnom" sistemu reference S. Na primer, otkucaju srca astronauta koji putuje brodom kroz vasionu će biti uskladjeni sa radom odgovarajućeg časovnika koji se nalazi u njegovom sistemu reference. I otkucaji srca i taj časovnik će biti usporeni[29] u odnosu na "nepokretan" sat koji se nalazi na Zemlji.[30]

[29] Astronaut ipak neće ni na koji način moći da oseti efekte tog usporavanja sve dok se nalazi u sopstvenom inercijalnom sistemu (princip relativnosti).

[30] Dilatacija vremena je fenomen koji može da se verifikuje i pri relativno malim brzinama ukoliko se vreme meri izuzetno preciznim časovnikom. U radu koji su u časopisu Science, 1972. godine objavila dva američka fizičara Joseph C. Hafele i Richard E. Keating, pod nazivom "Around the World Atomic Clocks: Relativistic Time Gains Observed," su prezentovani rezultati eksperimenta sa cezijumskim časovnicima. Četiri takva časovnika se nalazilo u avionu tokom njegovog komercijalnog leta a njihov rad je uporedjivan sa radom referentnog cezijumskog časovnika koji se nalazio na Zemlji. Rezultati su u nesumnjivom

- Primer 1. Jedna vrsta nestabilnih elementarnih čestica, koje su nazvane mioni[31] (odnosno μ mezoni), nastaju u višim slojevima atmosfere prilikom sudara kosmičkog zračenja sa česticama vazduha. Prosečno vreme života miona[32] je oko $2,2$ μs, mereno u njihovom sopstvenom sistemu reference (odnosno u sistemu u kome miruju ili se veoma sporo kreću u odnosu na njega).

  Ako pretpostavimo da mioni nastaju na visini od oko 5 kilometara, kreću pravo ka Zemlji, brzinom od oko $0,99c$, raspadaju se nakon $2,2$ μs, izračunati da li će mion uspeti da stigne do površine Zemlje pre nego što se raspadne.

  $\diamond$ Na prvi pogled put koji mioni mogu da predju pre nego što se raspadnu iznosi oko $l' = 600$ m , obzirom da je $l' = \tau' \cdot v = 2,2\mu\mathrm{s} \cdot 0,99 \cdot 3 \cdot 10^8$ m/s ≈ 600 m. Na osnovu ovoga bi moglo da se zaključi da do površine Zemlje ne bi mogao da dodje ni jedan mion nastao u gornjim slojevima Zemljine atmosfere jer bi se svi oni mnogo ranije raspali. Medjutim, eksperimenti pokazuju da na površinu Zemlje stiže jako puno miona. Objašenjenje ove činjenice daje dilatacija vremena. U odnosu na posmatrača koji se nalazi na Zemlji, vreme života miona nije τ' već $\tau = \gamma\tau'$, gde je τ' vreme života miona u njegovom sopstvenom sistemu reference (koji putuje sa njim). Na primer, ukoliko mion ima brzinu od $v = 0,99c$, to znači da je brzina kretanja njegovog sistema reference u jednaka toj vrednosti i da je faktor $\gamma \approx 7,1$, pa je na osnovu toga $\gamma\tau' = 16\mu s$. Na osnovu ovoga je srednje rastojanje koje je prešao mion, mereno u sistemu reference vezanom za Zemlju $l = \tau v = \gamma\tau' v \approx 4800$ m, što objašnjava činjenicu registrovanja velikog broja miona na zemlji.

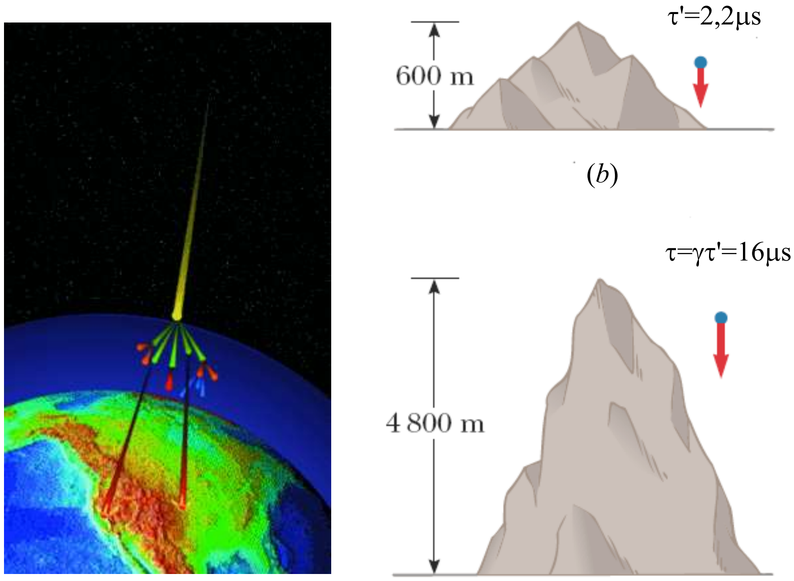
- Primer 2. Period klatna, meren u njegovom sopstvenom sistemu reference iznosi 3,0 s. Koliki je period istog klatna merenog iz sistema reference koji se kreće u odnosu na klatno brzinom $0{,}95c$?

  $\diamond$ Opisana situacija u kojoj se posmatrač kreće brzinom od $0{,}95c$ a sistem reference klatna miruje je ekvivalentna situaciji u kojoj se taj

skladu sa predvidjanjima specijalne teorije relativnosti a pokazivali su na to da su "leteći" časovnici kasnili 59 ± 10 ns dok je teorija predvidjala da kašnjenje bude 40 ± 23 ns, što predstavlja prilično dobar sklad očekivanja i rezultata merenja.

[31] Mioni imaju naelektrisanje jednako naelektrisanju jednog elektrona dok im je masa oko 207 puta veće od mase elektrona.

[32] Nakon isteka tog vremena (u proseku) mion se raspada na elektron, mionski neutrino i elektronski antineutrino.



(*a*) (*c*)

Slika 6.8: (*a*) Nastanak kosmičkog zračenja u višim slojevima atmosfere. Proton koji nailazi na atomsferu je prikazan žutom bojom. "Pljusak" kosmičkog zračenja (zelena boja) nastaje usled njegove interakcije sa jezgrima molekula vazduha. Neke od tih čestica (uglavnom π mezoni) u raspadu proizvode mione (crvena boja). Iako se većina miona raspadne relativno brzo, puno njih ipak stigne do površine Zemlje. (*b*) Krećući se brzinom od $0,99c$ u svom sistemu reference, u kome mu je vreme života $2,2\mu$s, mion predje put od 600 m. (*c*) Mereno iz sistema reference vezanog za Zemlju, on prelazi put od 4800 m.

sistem reference kreće istom brzinom u odnosu na nepokretnog posmatrača (klatno je primer mehaničkog časovnika).

Sopstveno vreme, prema datim podacima, iznosi $\Delta t' = 3,0s$. U skladu sa jednačinom (6.13) pokretni sat radi sporije od nepokretnog a interval vremena izmeren u nepokretnom sistemu reference je

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}95c)^2}{c^2}}}\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,902}}\Delta t' = 3,2 \cdot 3,0s = 9,6s.$$

Dobijeni rezultat pokazuje da je klatnu koje se kreće da bi napravilo jednu punu oscilaciju potrebno više vremena nego klatnu koje miruje.

- Primer 3. Krenuli ste na sastanak sa devojkom u drugi grad, vozeći automobil brzinom od 30 m/s. Ona očekuje da stignete za 3 sata. Zakasnili ste pola sata, pa kako ste čuli da se efekat vremenske dilatacije ispoljava pri velikim brzinama, odlučili ste da se pozovete na njega i da kažete kako je vaš sat pokazao da ste stigli za 3 sata ali pošto ste se kretali veoma brzo on je radio sporije od njenog. Medjutim, niste znali da je vaša devojka student fizike koji je upoznat sa specijalnom teorijom relativnosti i sa matematičkom analizom. Odvela vas je na kafu i na salveti izračunala koliko je trebalo da bude razlika u pokazivanju vašeg i njenog sata pod pretpostavkom da je vaš zaista pokazao da ste putovali 3 sata navedenom brzinom. Kako je izgledao njen račun?

  ◇ Ona je verovatno prvo morala da izračuna vrednost faktora γ koji je prema (6.14)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(3 \cdot 10^2 m/s)^2}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 10^{-14}}}.$$

  Na ovom mestu ste pokušali da je odobrovoljite rekaši da ćete na digitronu da izračunate vrednost dobijenog korena. Pustila vas je da se mučite i da se zaprepastite kada ste za γ dobili rezultat 1 koji vam nije išao u prilog. Nakon toga je razvila binom i ograničila se samo na prva dva sabirka

$$\gamma = (1 - 10^{-14})^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(10^{-14}) = 1 + 5,0 \cdot 10^{-15}.$$

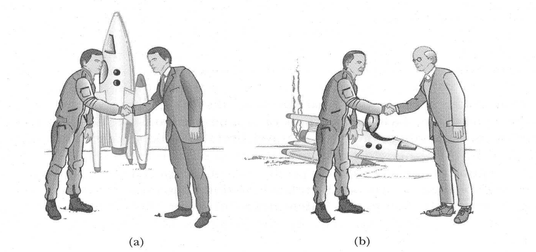
  Iz navedenog rezultata se pokazalo da se za tipične brzine automobila ovaj faktor ne razlikuje mnogo od 1. Primena jednačine (6.13) je pokazala koliko je vreme ona izmerila, u slučaju da je vaš sat izmerio $\Delta t' = 3$ h

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = (1{+}5,0{\cdot}10^{-15})(3\ \mathrm{h}) = 3\ \mathrm{h}{+}1,5{\cdot}10^{-14}\ \mathrm{h} = 3\ \mathrm{h}{+}0,054\ \mathrm{ns}.$$

Dakle, njen sat je, usled relativističkih efekata, išao ispred vašeg 0,054 ns!

Paradoks blizanaca

Jedna od veoma intrigantnih konsekvenci dilatacije vremena je takozvani *paradoks blizanaca*. Razmotrimo jedan eksperiment u kome učestvuju dva brata blizanca. Kada su imali po 20 godina jedan od njih, sklon avanturama, odlazi na kosmičko putovanje na Planetu X, udaljenu 20 svetlosnih godina od Zemlje.[33] Neka je kosmički brod, kojim putuje, sposoban da se kreće brzinom od $0,95c$ u odnosu na inercijalni sistem reference vezan za Zemlju. Nakon što je stigao na Planetu X, krenuo je odmah nazad ka Zemlji istom brzinom. Kada je došao na Zemlju, bio je šokiran činjenicom da je njegov brat ostareo 42 godine i da sada ima 62 godine. On sam je u medjuvremenu ostareo svega 13 godina.



Slika 6.9: (*a*) Kada je jedan blizanac otputovao sa Zemlje bili su jednako stari, (*b*) Kada se vratio sa putovanja bio je mladji od blizanca koji je ostao na Zemlji.

Sada se možemo malo poigrati pojmom relativnost i zapitati se koji se blizanac u stvari kretao i da li je uopšte logično da je neki od njih više ostareo. Razlog je taj što, gledano iz sistema reference blizanca koji je ostao na zemlji, on je mirovao a njegov brat je putovao i to prilično velikom brzinom. Iz perspektive pak onoga koji je bio u kosmičkom brodu, kosmički brod je bio u stanju mirovanja a Zemlja se, najpre udaljavala od broda 6,5

[33] Jedna svetlosna godina je rastojanje koje svetlost predje u vakuumu za vreme od jedne kalendarske godine.

godina a potom mu se približavala jednakom brzinom narednih 6,5 godina. Čini se da bi trebalo da dodjemo do zaključka da ne bi trebalo da bude razlike u njihovim godinama.

Da bi razrešili paradoks, podsetimo se da se specijalna teorija relativnosti odnosi na pojave i procese koji se odvijaju u **inercijalnim sistemima reference**, odnosno onima koji se kreću jedan u odnosu na drugi uniformno. Da li su sistemi vezani za Zemlju i brod sve vreme inercijalni i da li su stoga potuno ravnopravni? Dublja analiza pokazuje da to nije tako i da nema simetrije u opisivanju protoka vremena u ovim sistemima.

Osim toga, blizanac koji je otputovao brodom, da bi dostigao brzinu od $0,95c$ morao je da se ubrzava, na kraju prvog dela puta da uspori, okrene brod, ponovo ubrza a na kraju puta da uspori brod što znači da on nije sve vreme bio u inercijalnom sistemu reference pa je primena specijalne teorije relativnosti vezano za njegov sistem reference neosnovana. Naime, on ne može da kaže da je on u sistemu reference koji miruje dok se blizanac koji je ostao na Zemlji kreće uniformno pravolinijski u odnosu na njega (u fazama putovanja kada je njegov brod ubrzavao).

Dakle, zaključak da je blizanac u brodu u neinercijalnom sistemu reference je neizbežan. Takodje se može zaključiti da su njihovi sistemi reference zapravo u relativnom medjusobnom ubrzavanju, medjutim ubrzanje koje dobija brod je rezultat realne sile koja deluje na njega. Blizanac koji je putovao brodom bi mogao da kaže kako je inerval vremena u toku koga je njegov brod ubrzavao relativno mali u odnosu na ukupno vreme putovanja pa je tako većinu vremena ipak proveo u inercijalnom sistemu reference - i tu bi bio potpuno u pravu. Medjutim, kada dodje do planete X, on mora da zaustavi brod, okrene ga nazad i saopšti mu brzinu jednaku onoj koju je imao do tada ali suprotnog smera. Od tog momenta on se nalazi u **drugom sistemu reference**! To znači da jedino brat blizanac koji je ostao na Zemlji ima pravo da primenjuje formulu za dilataciju vremena (6.13) jer je jedino iz njegovog sistema reference je ona tačna. Na osnovu nje sledi, da ako su na Zemlji protekle 42 godine u svemirskom brodu je proteklo

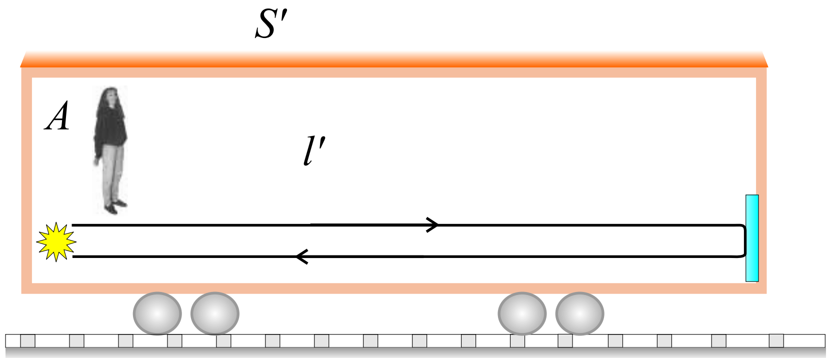
$$\Delta t' = 42g\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 13g,$$

odnosno kosmički brod je (mereno na satu koji se nalazi u njemu) potrošio 6,5 godina da ode do planete X i još toliko da se vrati.

6.4.3 Kontrakcija dužina

Iz dosadašnjeg razmatranja je jasno da jedna od veličina, oko čijeg iznosa posmatrači iz različitih referentnih sistema mogu da se slože, je relativna brzina njihovih inercijalnih sistema reference. I dok im satovi, kao što smo videli, pokazuju različite vremenske intervale izmedju istih dogadjaja, oni će biti saglasni da je relativna brzina njihovih sistema, koja je jednaka količniku rastojanja inercijalnih sistema reference i vremenskog intervala za koji su se udaljili jedan od drugog (pretpostavljajući da su im se u početku merenja vremena koordinatni počeci poklapali) jednaka. Kako je ona količnik rastojanja izmedju sistema (pod navedenim uslovima) i vremenskog intervala (koji zavisi od toga iz kog sistema reference ga merimo), jasno je da i predjeno rastojanje mora da zavisi od relativnog kretanja posmatrača. Jer ukoliko dva posmatrača mere različita vremena, onda oni moraju da mere i različite dužine - da bi relativna brzina ostala ista za obojicu.

Razmotrimo sledeću situaciju. Osoba A se nalazi u vagonu dužine l' mereno iz njenog (sopstvenog) sistema reference (iz sistema reference vezanog za vagon), dok se osoba B nalazi van vagona, pored pruge. Izvor svetlosti se nalazi na zadnjoj strani vagona (slika 6.10), dok se ogledalo nalazi na prednjoj. Vagon se kreće brzinom u u odnosu na Zemlju. Izvor emituje svetlost koja se kreće ka ogledalu, odbija se od njega i odlazi natrag ka izvoru.



Slika 6.10:

U sistemu reference osobe A (slika 6.10), vreme potrebno svetlosti da predje opisani put je

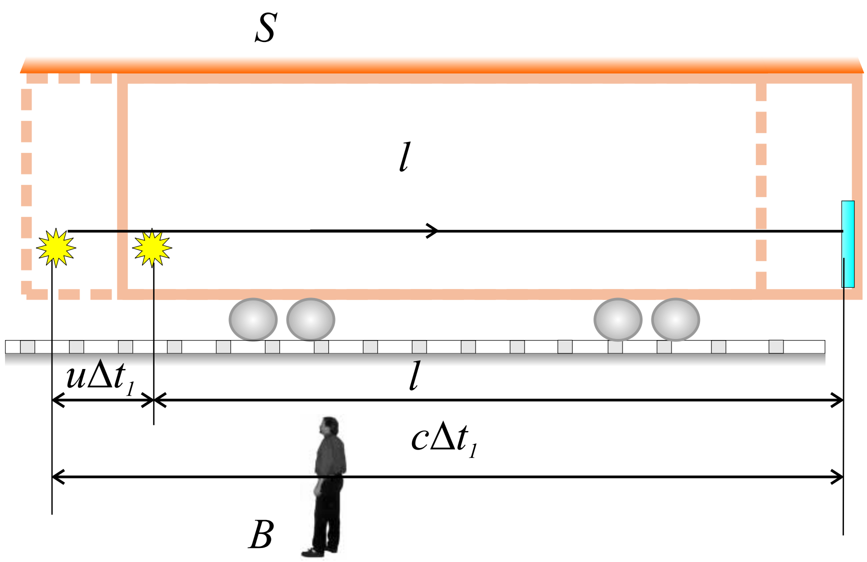
$$\Delta t_A = \frac{2l'}{c}. \tag{6.15}$$

Gledano iz sistema reference osobe B, situacija je nešto komplikovanija. Neka je dužina vagona merena iz njega l. Posmatrano iz tog sistema, za vreme t_1, za koje je svetlosni zrak došao do ogledala, obzirom da se ceo vagon, krećući se brzinom u pomerio na rastojanje ut_1, svetlosni zrak je prešao

$$c\Delta t_1 = l + u\Delta t_1, \tag{6.16}$$

odakle je vreme Δt_1

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c-u}. \tag{6.17}$$



Slika 6.11: Predjeni put svetlosti, od izvora do ogledala, je uvećan za put koji je prešao vagon krećući se brzinom u.

Nakon odbijanja, obzirom da se vagon kreće suprotno od zraka svetlosti, on je za Δt_2 prešao put

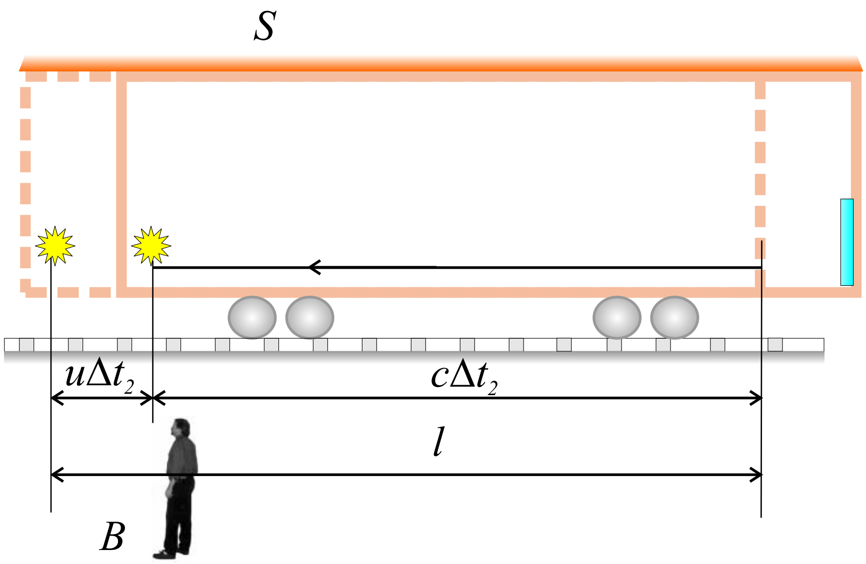
$$c\Delta t_2 = l - u\Delta t_2, \tag{6.18}$$

što znači da je ovo vreme

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c+u}. \tag{6.19}$$

Ukupno vreme, mereno iz sistema osobe B, je zbir ova dva vremena

$$\Delta t_B = \Delta t_1 + \Delta t_2 = l\left[\frac{1}{c-u} + \frac{1}{c+u}\right] = \frac{2lc}{c^2-u^2} = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{6.20}$$



Slika 6.12: Predjeni put svetlosti, od ogledala do izvora, je umanjen za put koji je prešao vagon krećući se brzinom u.

Iskoristimo li relaciju za dilataciju vremena (6.13), koja primenjena na oznake korišćene ovde glasi

$$\Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

i zamenimo u jednačinu (6.20), imajući u vidu da važi i relacija (6.15), dobijamo

$$l = l'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{l'}{\gamma}. \tag{6.21}$$

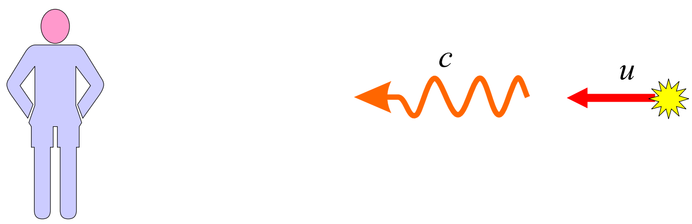
Kako je faktor $\gamma > 1$, jasno je da će posmatrač B za dužinu voza izmeriti l, pri čemu je ta dužina veća od dužine voza (sopstvene dužine) merene u sistemu reference vezanog za sam voz. Drugim rečima uvek je $l < l'$, gde je sa l' označena sopstvena dužina tela. Efekat je poznat pod nazivom **kontrakcija dužine**.

6.4.4 Relativistički Doplerov efekat

Veoma važna posledica dilatacije vremena je pomeraj u frekvenciji svetlosti koju emituju atomi koji se nalaze u kretanju u odnosu na emitovanu od strane istih atoma koji se nalaze u stanju mirovanja. Ovaj fenomen, poznat u fizici pod imenom Doplerov efekat, je ranije uveden za zvučne talase. Za slučaj takvih talasa, budući da su mehanički, efekti kretanja izvora zvuka u odnosu na sredinu kroz koju se prostire talas, se razlikuju od efekta kretanja posmatrača u odnosu na sredinu. Svetlosni talasi se medjutim razlikuju od zvučnih u tome što im za prostiranje nije neophodna sredina. U tom smislu u slučaju svetlosnih talasa nemamo način da napravimo razliku izmedju kretanja izvora talasa i kretanja posmatrača. Već na osnovu ovoga se vidi da je neophodno izvršiti pažljiviju analizu uticaja kretanja izvora i prijemnika na razliku u frekvencijama emitovanog i primljenog signala, u relativističkom slučaju.

Pretpostavimo da svetlosni izvor, u njegovom sopstvenom sistemu reference S', emituje svetlosne pulseve frekvencijom ν', krećući se ka posmatraču, odnosno njegovom sistemu reference S, brzinom u. Kolika će biti frekvencija svetlosnih pulseva koji dolaze u oko posmatrača?

Postoje zapravo dva faktora koji doprinose Doplerovom efektu. Prvi je relativistički efekat dilatacije vremena: period izmedju pulseva je veći u sistemu S pa je time i frekvencija manja u tom sistemu. Drugi uticaj je uobičajeni Doplerov efekat koji se javlja usled kretanja izvora pulseva-sukcesivni pulsevi treba da predju sve manje i manje rastojanje (ili sve veće i veće u slučaju da se izvor svetlosti udaljava-tada je brzina u negativna) da bi stigli do prijemnika. Usled toga se frekvencija pulseva koji stižu do posmatrača povećava (ili opada ako je u suprotno usmerena).



Slika 6.13: .

Neka je vreme izmedju pulseva u sopstvenom sistemu reference izvora $\Delta t' = 1/\nu'$. Meren iz sistema reference S ovaj vremenski interval, usled dilatacije vremena, iznosi $\Delta t = \gamma \Delta t'$. To znači da, gledano iz sistema S, fotoni jednog pulsa predju rastojanja $c\Delta t = c\gamma\Delta t'$ do registracije narednog pulsa. U toku tog vremenskog intervala, izmedju emitovanja dva sukcesivna pulsa, izvor pulseva prelazi rastojanje $u\Delta t = u\gamma\Delta t'$ ka sistemu reference S. Zaključujemo da su, u trenutku kada je emitovan naredni puls, njegovi fotoni na rastojanju (gledano iz S) $c\Delta t - u\Delta t = c\gamma\Delta t' - u\gamma\Delta t'$ iza fotona prethodnog pulsa. Ovaj rezulta važi za sve susedne pusleve. Vreme izmedju dolaska pulseva u oko posmatrača, ΔT, se dobija kada se to rastojanje podeli brzinom pulseva, c i iznosi

$$\Delta T = \frac{c-u}{c}\Delta t = \frac{c-u}{c}\gamma\Delta t' = \frac{1-\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Delta t'. \tag{6.22}$$

Na osnovu ovog izraza je frekvencija pulseva koje registruje posmatrač jednaka

$$\nu = \frac{1}{\Delta T} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}}\nu'. \tag{6.23}$$

Kako je ovaj izraz izveden za slučaj kada se izvor kreće ka posmatraču jasno je da je $\nu > \nu'$ i da nerelativistički doprinos ukupnom efektu (faktor $1/(1-u/c)$) dominira nad efektom dilatacije fremena. U tom slučaju se kaže da je svetlost doživela "plavi pomak", jer se u delu vidljivog spektra sa višim frekvencijama upravo nalazi plava svetlost. Nakon jednostavnih transformacija prethodna formula postaje

$$\nu = \sqrt{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}}\nu'. \tag{6.24}$$

Ukoliko se izvor svetlosti udaljava od nas, treba prosto promeniti znak brzine pa formule (6.23) i (6.23) imaju oblik

$$\nu = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}}\nu' = \sqrt{\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}}\nu'. \tag{6.25}$$

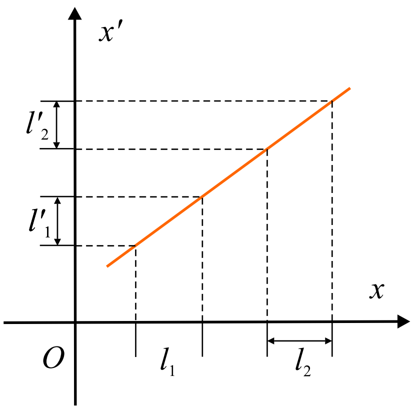
U ovom slučaju je frekvencija registrovane svetlosti manja od frekvencije emitovane a na to utiču oba efekta (i nerelativistički i relativistički). U tom slučaju svetlost doživljava "crveni pomak", obzirom da crvenoj boji u vidljivom spektru odgovaraju manje frekvencije.

6.5 Lorencove transformacije

Na osnovu dosadašnjih analiza je postalo jasno da, Galilejev princip relativnosti, njegove transformacije, i klasičan zakon sabiranja brzina koji se dobija na osnovu njih, su u suprotnosti sa eksperimentalnom činjenicom konstantnosti brzine svetlosti. To ukazuje na nužnost uvodjenja novih transformacija koordinata za prelaz iz jednog inercijalnog sistema reference u drugi. One bi morale da važe za sve brzine[34] kretanja sistema, od $u = 0$ do $u = c$.

Posmatrajmo, kao i do sada, jedan koordinatni sistem S, sa osama xyz povezan sa Zemljom ("nepokretan" sistem reference), i drugi S' sa osama $x'y'z'$, povezan sa vagonom koji se kreće u pozitivnom smeru x ose ("pokretan" sistem reference) konstantnom brzinom u. U tom slučaju, kako duž osa y i z nema kretanja sistema, kao i u slučaju Galilejevih transformacija (2.40), njihova veza je trivijalna i glasi

$$y' = y, \quad z' = z. \tag{6.26}$$



Slika 6.14:

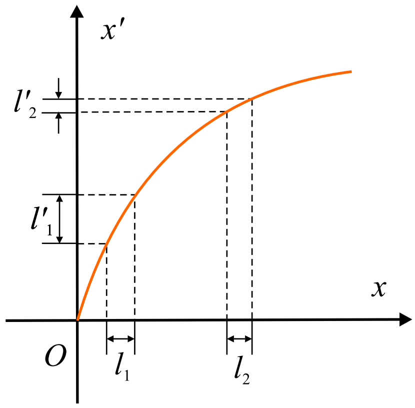
Oko odredjivanja funkcionalne veze preostalih koordinata (jedne prostorne i vremenske) od velike pomoći će nam biti činjenica da one mora da budu takve da ne promene osobine prostora i vremena pri prelasku iz jednog sistema u drugi. Osnovne osobine prostora su da je on homogen i izotropan a za vreme da je homogeno.[35] Iz ovoga sledi da transformacija koordinata (njihova funkcionalna veza) mora da bude linearna funkcija (slika 6.14). Kako se sa pomenute slike vidi, u tom slučaju dužina odsečka neće zavisiti od toga u kojoj oblasti prostora će se on nalaziti, iz $l_1 = l_2$ sledi $l_1' = l_2'$.[36]

[34] Galilejeve transformacije važe samo za male brzine kretanja sistema.

[35] Podsetimo se da ove činjenice imaju direktne veze sa zakonima održanja u mehanici.

[36] Ovu činjenicu ne treba mešati sa efektom relativnosti dužine koji se odnosi na merenja jedne dužine jednog istog tela iz dva sistema reference koji su u medjusobnom kretanju. U ovom slučaju je reč o merenju u sistemima reference u kojima tela miruju, dakle o odredjivanju sopstvenih dužina koje moraju biti iste u svim sistemima reference.

Ako bi transformacije bile nelinearne (slika 6.15), iz $l_1 = l_2$ bi sledilo da je $l_1' \neq l_2'$, odnosno dužina odsečka bi zavisila od toga u kom delu prostora se on nalazi što bi narušilo homogenost prostora.



Slika 6.15:

Analogan zaključak važi i za vreme.

Prema tome, traženi zakon transformacije koordinata treba tražiti u obliku linearnih funkcija

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Mx + Nt, \tag{6.27}$$

gde su A, B, M i N konstante koje treba odrediti.

Ukoliko posmatramo kretanje neke materijalna tačke duž pravca x ose, gledano iz sistema reference S', ona će u vremenskim trenucima t_1' i t_2' imati prostorne koordinate x_1' i x_2', a njen pomeraj će biti

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = A(x_2 - x_1) + B(t_2 - t_1) = A\Delta x + B\Delta t. \tag{6.28}$$

Interval vremena za koji se on desio (takodje u sistemu S') je

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = M(x_2 - x_1) + N(t_2 - t_1) = M\Delta x + N\Delta t. \tag{6.29}$$

Na osnovu ovoga je sada (srednja) brzina posmatrane materijalne tačke koja se kreće duž x ose

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{A\Delta x + B\Delta t}{M\Delta x + N\Delta t}. \tag{6.30}$$

Kako je brzina te iste tačke u odnosu na Zemlju (gledano iz sistema S)

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \tag{6.31}$$

veza brzine iste tačke, posmatrane iz dva sistema reference, je data izrazom

$$v' = \frac{Av + B}{Mv + N}. \tag{6.32}$$

Dobijen je opšti izraz koji mora da važi za sve brzine v i v', pod pretpostavkom da izmedju koordinata u dva sistema postoji veza oblika (6.27). Medjutim, da bi izraz koji povezuje brzine bio od praktične važnosti, treba u njemu odrediti konstante A, B, M i N. U tu svrhu je zgodno razmotriti nekoliko posebnih slučajeva kretanja.

Neka materijalna tačka miruje u odnosu na vagon. U tom slučaju je $v' = 0$ dok je $v = u$, odnosno gledano sa Zemlje ona se kreće u odnosu na nju brzinom vagona. Imajući u vidu tu činjenicu, izraz (6.32) postaje

$$0 = \frac{Au + B}{Mu + N},$$

odakle je

$$B = -Au. \tag{6.33}$$

U slučaju kada tačka miruje u odnosu na Zemlju, $v = 0$, brzina njenog kretanja u odnosu na sistem S' je $v' = -u$. Ukoliko to zamenimo u jednačinu (6.32) i iskoristimo (6.33), dobijamo $-u = -Au/N$, odakle sledi da je

$$N = A. \tag{6.34}$$

Neka se sada umesto materijalne tačke kroz vagon kreće svetlosni talas. Na osnovu postulata konstantnosti brzine svetlosti, dobijamo

$$v' = v = c, \tag{6.35}$$

a ako to zamenimo u (6.33), iskoristimo (6.34) i (6.35), dobijamo $c = \frac{Ac - Au}{Mc + A}$, odakle je

$$M = \frac{Au}{c^2}. \tag{6.36}$$

Zamena dobijenih vrednosti za B, M i N u (6.33), dobija se izraz koji se naziva *relativistički zakon sabiranja brzina* (za kretanje duž x ose)

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \tag{6.37}$$

odakle se lako dobija da važi

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}. \tag{6.38}$$

Iz ovih dveju jednačina se vidi da se one razlikuju samo u predznaku brzine relativnog kretanja dva posmatrana sistema reference.

6.5.1 Lorencove transformacije

Relacije (6.27), u skladu sa analizama do sada izvršenim imaju oblik

$$x' = A(x - ut), \quad t' = A\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \tag{6.39}$$

odnosno, da bi nam relacije (6.27) postale potpuno pozante moramo da odredimo još i konstantu A.

Prema principu relativnosti, postoji potpuna ravnopravnost oba posmatrana sistema reference: možemo za nepokretan sistem reference uzeti sistem vezan za vagon, a za pokretan sistem vezan za Zemlju, u tom slučaju će se ovaj drugi sistem kretati, u odnosu na vagon, brzinom " $-u$". To znači da relacije koje opisuju veličine x i t, preko x' i t' imaju oblik

$$x = A(x' + ut'), \quad t = A\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right). \tag{6.40}$$

Kada, relacije (6.40) zamenimo u (6.39), dobija se

$$x' = A^2\left(x' + ut' - ut' - \frac{u^2}{c^2}x'\right), \tag{6.41}$$

odakle nakon skraćivanja x' dobijamo da je

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{6.42}$$

odnosno ona je jednaka ranije uvedenoj konstanti γ. Na osnovu ovoga, se dobijaju transformacije poznate pod nazivom Lorencove[37] u obliku

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{6.43}$$

odnosno

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{6.44}$$

One povezuju prostorno vremenske koordinate (x, y, z, t) i (x', y', z', t') jednog istog dogadjaja posmatrano iz dva inercijalna sistema reference S i S' za slučaj kada se sistem S' kreće duž x ose konstatnom brzinom u.

[37] Transformacije ovog oblika je 1890. godine dobio Hendrik A. Lorentz (1853-1928) u vezi elektromagnetskih pojava. Značaj Ajnštajna je u tome što je prvi uvideo njihovu važnost i dao im odgovarajuću interpretaciju u okviru specijalne teorije relativnosti.

6.5.2 Relativistički zakon sabiranja brzina

Neka je, kao i do sada S stacionarni sistem reference a S' sistem koji se u odnosu na njega kreće brzinom $\vec{u} = u\vec{e}_x$. Neka neko telo ima brzinu $\vec{v}$ u odnosu na sistem S. Gledano iz sistema S' njegova brzina će biti $\vec{v}'$, a njena x' komponenta je

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}.$$

Prema jednačini (6.43), diferencijali dx' i dt' su

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \text{i} \quad dt' = \frac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

pa zamena u prethodnu jednačinu daje

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx - udt}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}{\frac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}}.$$

Kako je dx/dt u stvari v_x komponenta brzine tela u odnosu na sistem S, transformacioni izraz za v'_x komponentu brzine postaje

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}. \tag{6.45}$$

Na analogan način, polazeći od toga da je $v'_y = dy'/dt'$ i $v'_z = dz'/dt$ se dobija da za preostale dve kompoente brzine vav ze relacije

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}. \tag{6.46}$$

Različitost izraza za transformaciju brzine po komponentama je izazvana činjenicom da se sistem S' kreće duž x ose u odnosu na sistem S. U slučaju da se kretanje odvija duž y ili z ose došlo bi do odgovarajuće izmene transformacionih relacija.

U slučaju da su i v_x i u manje brzine od brzine svetlosti c, imenioc u izrazu (6.45) postaje jednak jedinici, pa ovaj izraz postaje $v'_x = v_x - u$, što predstavlja Galilejev zakon za sabiranje brzina. U drugom graničnom slučaju kada je $v_x = u = c$, ova jednačina (6.45) daje

$$v'_x = \frac{c - u}{1 - \frac{cu}{c^2}} = \frac{c\left(1 - \frac{u}{c}\right)}{1 - \frac{u}{c}} = c.$$

Iz ovog rezulata zaključujemo da ako se neko telo kreće brzinom c u odnosu na posmatrača koji se nalazi u sistemu S, onda obavezno ima istu brzinu i u odnosu na posmatrača koji se nalazi u sistemu S', nezavisno od relativne brzine ova dva sistema.

Formule (6.45) i (6.46) omogućuju da, ako su poznate komponente brzine v_x, v_y i v_z tela u odnosu na sistem S, se dobiju njene komponente v'_x, v'_y i v'_z u odnosu na sistem S'. Obrunto, ukoliko su poznate komponente brzine u odnosu na sistem S', komponente brzine u odnosu na sistem S glase[38]

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}, \tag{6.47}$$

$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv'_x}{c^2}}. \tag{6.48}$$

6.6 Osnovne kinematičke posledice Lorencovih transformacija

6.6.1 Dilatacija vremena

Neka se u koordinatnom početku ISR S' nalazi časovnik. On će pokazivati vreme t' a njegove koordinate u tom sistemu reference su $x' = y' = z' = 0$. Ako zamenimo te vrednosti za prostorno-vremenske koordinate u izraze za Lorencove transformacije (6.44) dobićemo koordinate časovnika gledano iz laboratorijskog sistema u odnosu na koji se sat, odnosno njegov sopstveni sistem reference S' kreće brzinom u: $x = ut, y = 0, z = 0$ (zato što se gledano iz S sat kreće duž x ose). Vremenska koordinata će biti

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \text{ ili } t' = t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{6.49}$$

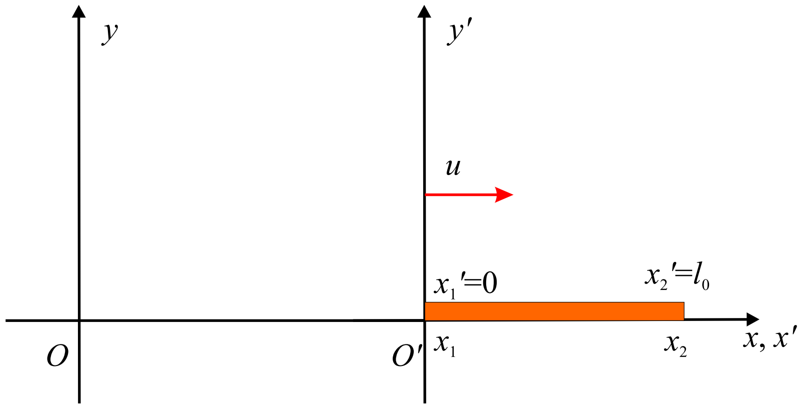
Reč je zapravo o relacijama koje predstavljaju vezu izmedju intervala vremena koje pokazuju sat u laboratorijskom i sat u pokretnom sistemu reference. Kao što smo i ranije zaključili, vreme koje pokazuje sat u sistemu S' u kome miruje, je manje od vremena koje je izmereno u sistemu S. *Vreme t' koje pokazuje sat u sistemu reference u kome miruje, se naziva* **sopstveno vreme**.[39]

[38] Ove formule se dobijaju kada se zamene mesta primovanim i neprimovanim komponentama u relacijama 6.45) i (6.46) uz zamenu brzine u sa $-u$.

[39] Konkretna konstrukcija satova je nebitna i ne utiče na ovaj efekat, jer je reč o tome da vremenski intervali više nisu invarijantni za različite sisteme reference.

6.6.2 Kontrakcija dužine

Neka je za štap, koji se u pravcu svoje ose simetrije kreće brzinom u u odnosu na sistem S, vezan sistem S' (slika 6.16). Interesantno je uporediti



Slika 6.16:

dužine štapa, merene iz različitih inercijalnih sistema reference. Veoma je bitno da uočimo kako se ona dobija. Naime, odrede se koordinate krajeva štapa u **jednom istom trenutku** pa se napravi njihova razlika. Dužina štapa merena u njegovom sopstvenom sistemu reference S', se naziva **sopstvena dužina** i obično označava sa l_0. Neka se jedan kraj štapa nalazi u koordinatnom početku ($x'_1 = 0$), a drugi na mestu sa koordinatom $x'_2 = l_0$. Iz Lorencovih transformacija (6.43) se, za krajeve štapa, gledano iz sistema S, dobija: $x_1 = ut$ i $x_2 = l_o\sqrt{1 - u^2/c^2} + ut$. Razlika ovih dveju koordinata predstavlja dužinu štapa u sistemu S

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{6.50}$$

Pokretni štap je prema ovoj relaciji kraći od štapa koji se nalazi u stanju mirovanja. Kao što će biti pokazano, ovaj zaključak je u skladu sa činjenicom da, u relativističkoj mehanici (odnosno za tela koja se kreću velikim brzinama), invarijanta veličina nije prostorno rastojanje već interval u prostor-vremenu.

6.7 Interval

Vratimo se za trenutak u nereletavističku mehaniku i podsetimo se kako se odredjuje kvadrat rastojanja Δl dve tačke sa koordinatama (x_1, y_1, z_1)

i (x_2, y_2, z_2). Obzirom da je prostor klasične mehanike ravan, primenom pitagorine teoreme se dobija

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \tag{6.51}$$

gde je $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ i $\Delta z = z_2 - z_1$.[40] Koordinate ove dve tačke u principu mogu da budu koordinate dva dogadjaja, jednog koji se desio u t_1 i drugog koji se desio u t_2, pri čemu je vremenski interval izmedju njih $\Delta t = t_2 - t_1$. Uvek kada pominjemo koordinate nekog dogadjaja moramo da naglasimo u odnosu na koji sistem ih merimo. Neka to bude neki sistem S koji ćemo smatrati laboratorijskim odnosno "nepokretnim". Gledano iz nekog drugog inercijalnog sistema reference S', koji se u odnosu na laboratorijski kreće uniformno brzinom u, prostorne i vremenske koordinate ova dva dogadjaja će biti (x_1', y_1', z_1', t_1') i (x_2', y_2', z_2', t_2'), a kvadrat prostornog rastojanja

$$\Delta l'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \tag{6.52}$$

dok je vremenski interval $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Kao što je diskutovano kada je bilo reči o inercijalnim sistemima u nerelativističkoj mehanici, veza ova dva inercijalna sistema se ostvaruje Galilejevim transformacijama (2.39) koje ih ostavljaju invarijantnim. Relativno lako se proverava da zaista važi da je $\Delta l' = \Delta l$, za dva sistema reference koja su povezana Galilejevim transformacijama, dok je za vremenski interval stvar trivijalna obzirom da je vreme u mehanici malih brzina apsolutno, pa važi $\Delta t' = \Delta t$. Kraće rečeno vremenski intervali i prostorna rastojanja u nerelativističkoj mehanici ne zavise od toga iz kog inercijalnog sistema reference se mere.

Kada je reč o telima koja se kreću velikim brzinama, videli smo da ni prostorna rastojanja (dužine) a ni vremenski intervali nisu invarijantni (usled relativističkih efekata kontrakcije duv zine i dilatacije vremena) i da je veza dva inercijalna sisitema reference data Lorencovim transformacijama. Postavlja se logično pitanje da li možda i u ovom slučaju postoji neka veličina koja je invarijantna, odnosno koja neće zavisiti od toga iz kog inercijalnog sistema reference se odredjuje.

Obzirom da je do sada postalo jasno da je vremenska koordinata ravnopravna i neodvojiva od prostornih, kao i to da su koordinate dva dogadjaja (x_1, y_1, z_1, ct_1) i (x_2, y_2, z_2, ct_2) (od sada pa na dalje će umesto vremena biti korišćen proizvod njega i brzine svetlosti u vakuumu obzirom da ima dimenzije dužine), logično je pokušati zadavanje traženog izraza u obliku

$$\Delta s^2 = \Delta l^2 + c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + c^2 \Delta t^2,$$

[40]Samo rastajanje je odgovarajući kvadratni koren $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

ali kao što je relativno lako proveriti, ovaj izraz nije invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije, odnosno nema istu vrednost za sve inercijalne posmatrače. Pokazuje se, medjutim da izraz

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{6.53}$$

ostaje invarijantan pri prelazu iz jednog inercijalnog sistema u drugi. Ovaj izraz predstavlja *kvadrat invarijantnog intervala.*[41]

Napomenio na kraju još jednu veoma važnu stvar a to je da dok je izraz (6.51) uvek pozitivan, izraz za kvadrat intervala u specijalnoj teoriji relativnosti (6.53), obzirom na oblik, može da bude pozitivan, negativna i nula!

6.7.1 Tipovi intervala

Kalo interval (6.53) može da ima tri oblasti vrednosti, potrebno je posebno ih proanalizirati

Slučaj 1: $\Delta s^2 > 0$

Ovo je takozvani **vremenski** tip intervala, obzirom da u njegovom izrazu dominira prvi sabirak koji je u vezi sa vremenskim intervalom izmedju dva dogadjaja. Kako je interval invarijantan, ako je interval vremenskog tipa u jednom inercijalnom sistemu reference onda će on biti takav i u svim ostalim. Naravno, merenja iz ostalih inercijalnih sistema daju različite vrednosti za $\Delta t'$ i $\Delta l'$ ali je njihov medjusobni odnos uvek takav da je $c^2\Delta t'^2 > \Delta l'^2$. U takve sisteme spada i sistem u kome se dogadjaji dešavaju na istom mestu u prostoru, odnosno za koji je $\Delta l' = 0$. Tada je

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2,$$

a vreme t' izmereno u njemu se naziva *sopstveno vreme.* Ono je sa vremenom iz sistema S, obzirom na invarijantnost Δs, povezano na sledeći način

$$c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2. \tag{6.54}$$

[41]Nagalasimo da izbor invarijantnog intervala nije potpuno jednoznačan jer ako je on invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije, invarijantan je i izraz $-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$.

Slučaj 2: $\Delta s^2 < 0$

Ovakvi intervali, obzirom na dominaciju prostornog dela , $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, u njima u odnosu na vremenski deo $c^2 \Delta t^2$, se nazivaju **prostornim** Kao i u prethodnom slučaju, obzirom da je reč o invarijantnoj veličini, ona je ista u svim inercijalnim sistemima reference. Kako i Δt i Δl mogu da imaju bilo koje vrednosti uz jedini uslov da je $\Delta s^2 < 0$, postoji sistem reference u kome su dogdjaji istovremeni, to jesto za koji važi $\Delta t' = 0$. U tom slučaju važi, obzirom na invarijantnost Δs^2

$$\Delta s'^2 = -\Delta l^2$$

a rastojanje ova dva dogadjaja u tom sistemu S' u kome su istovremeni, naziva se *sopstveno rastojanje*.

Slučaj 3: $\Delta s^2 = 00$

Ovakvi intervali se nazivaju **homogeni** ili **svetlosni**. Za njih je $c\Delta t = \Delta l$ i to važi u svim inercijalnim sistemima reference. Odnosno, ukoliko su dva dogadjaj razdvojena svetlosnim tipom intervala, ne postoji inercijalni sistem reference u kojem se oni dešavaju na istom mestu ili istovremeno.

6.7.2 Primeri primene invarijantnog intervala

Dilatacija vremena

Neka se sistem S' kreće brzinom $\vec{u} = u\vec{e}_x$ u odnosu na S. Posmatrajmo dva dogadjaja koja se dešavaju na istom mestu u S', npr. u koordinatnom početku, razdvojena vremenskim intervalom $\Delta t'$. Koordinate dogadjaja u ova dva sistema reference su (izostavićemo y i z koordinate jer su one iste za oba dogadjaja obzirom da se kretanje odvija duž x ose):

u S': $(x', t') = (0, \Delta t')$

u S: $(x, t) = (u\Delta t, \Delta t)$.

Zbog Invarijantnost intervala sledi relacija

$$c^2 \Delta t'^2 - 0 = c^2 \Delta t^2 - u^2 \Delta t^2$$

odakle se dobija

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

6.8 Prostor Minkovskog

Prostor nerelativističke fizike (fizički prostor u kome se odigrava kretanje tela) je primer euklidskog prostora. Taj prostor je ravan[42]. U jednom takvom prostoru, kvadrat rastojanja dve beskonačno bliske tačke je zadat izrazom analognom izrazu (6.51)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{6.55}$$

Iz ove relacije se mogu izvući sve neophodne informacije o prostoru u kome se odvija kretanje. Kako su najvažnije vezane za merenje distanci u njemu ona se naziva *metrikom*[43] datog prostora. Uočimo takodje da je metrika prostora jednaka skalarnom proizvodu diferencijala vektora položaja[44] $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ sa samim sobom. Iz oblika metrike se takodje može zaključiti da li ona odgovara prostoru koji je ravan ili zakrivljen. Naime, ukoliko je metrika oblika (6.55), odnosno uz diferencijale dx, dy i dz stoje konstante to zna v ci da je posmatrani prostor ravan. U slučaju da se u metrici uz pomenute diferencijale nalaze funkcije promenljivih x, y, z, prostor je zakrivljen. Situacija da je dl^2 jednako zbiru dx^2, dy^2 i dz^2 odgovara činjenici da je prostor euklidski.

Postupajući na isti način i u slučaju prostor-vremena specijalne teorije relativnosti, polazeći od izraza (6.53), za njegovu metriku se dobija

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{6.56}$$

Kako uz diferencijale nezavisno promenljivih stoje konstante, prostor specijalne teorije relativnosti je ravan. Obzirom da u metrici imamo i negativne kvadrate diferencijala promenljivih metrika nije euklidska već se naziva *pseudoeuklidskom*.

Prostor sa ovakvim osobinama je u matematici bio poznat i pre formulisanja specijalne teorije relativnosti pod nazivom *prostor Minkovskog*.[45]

6.8.1 Grafici u prostor-vremenu

Kao što smo videli prostor-vreme specijalne teorije relativnosti je ustvari prostor Minkovskog. Kao i u drugim prostorima (euklidskom na primer) i u

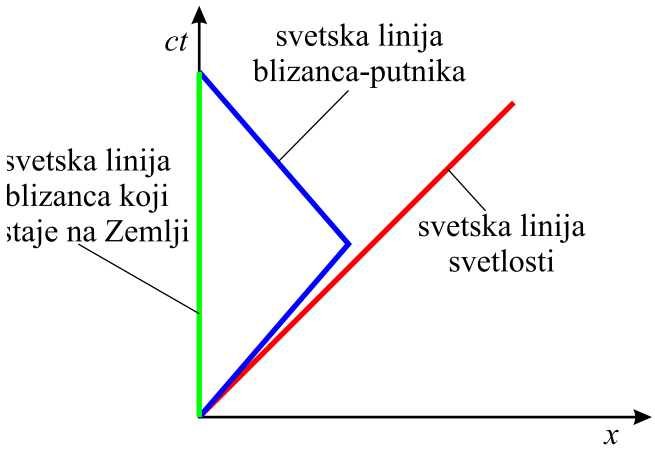
[42] Kriterijum za odredjivanje toga da li je prostor ravan ili zakrivljen je provera da li za svaki trougao važi $\alpha+\beta+\gamma = 180^o$ (α, β i γ su uglovi trougla), odnosno za svaku kružnicu $O/r = 2\pi$, gde je O obim a r poluprečnik kružnice.

[43] Precizniji naziv je *metrička forma* prostora.

[44] Ovaj vektor prikazuje infinitezmalno pomeranje posmatrane materijalne tačke.

[45] Naziv je dobio po imenu matematičara Hermana Minkovskog (18..-19..).

njemu je od velike važnosti prikazivanje funkcionalnih zavisnosti graficima. Pre svega je od interesa prikazati zavisnost pozicije tela prikazane koordinatama x, y, z od vremena. Kako je reč o četvorodimenzionalnom prostoru taj zadatak je na prvi pogled nemoguć jer sve četiri koordinatne ose bi trebalo da budu medjusobno pod pravim uglom. Medjutim ako za početak posmatramo samo kretanje koje se odvija duž x ose onda y i z osu i ne moramo da prikazujemo, tako da će nam za predstavljanje dogadjaja biti dovoljen dve ose.

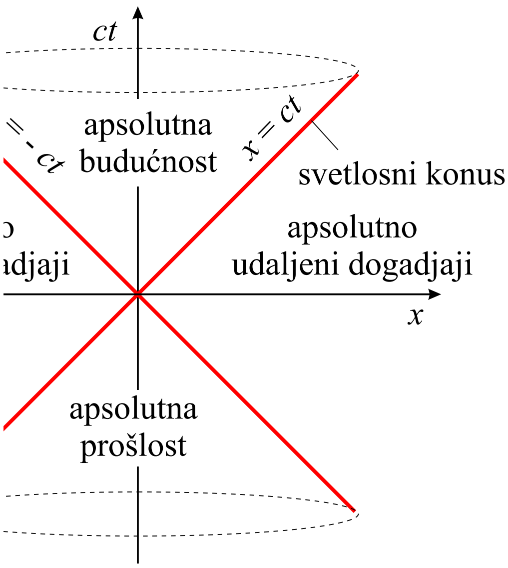


Slika 6.17: Paradoks blizanaca prikazan na grafiku u prostor-vremenu. Blizanac koji ostaje ima svetsku liniju duž vremenske ose. Putanja blizanca koji je putovao je svetska linija koja menja smer.

Za konstrukciju prostorno-vremenskih grafika je ordinatna osa obično vremenska (u stvari ct) osa, dok je apsicsna osa prostorna koordinata x. Svaka linija koja se nacrta na takvom grafiku se naziva **svetska linija**.

Paradoks blizanaca je prikazan na takvom grafikonu na slici 6.17. U početnom trenutku vremena svetske linije oba brata se poklapaju jer se nalaze na istom mestu u prostor-vremenu. Kada jedan od njih ode na put, njegova svetska linija se udaljava od linije brata blizanca koja se, obzirom da on ostaje na istom mestu (ne menja mu se x koordinata), poklapa sa ct osom. U momentu kada se oni opet sastanu, obzirom da se tada opet nalaze na istom mestu, svetske linije će im se preseći. Da bi se to desilo, svetska linija blizanca koji putuje mora da bude izlomljena, odnosno kada krene nazad ka Zemlji, ona menja nagib prema x osi.

Svetska linija svetlosnog pulsa je dijagonala u prostor-vremenu, odnosno linija sa nagibom od 45^o stepeni koja ide kroz prvi ili drugi kvadrant u



Slika 6.18:

zavisnosti od toga da li svetlost ide u pozitivnom ili negativnom smeru x ose (prave čije su jednačine $x = \pm ct$). Sve svetske linije mogućih dogadjaja sa blizancima, obzirom da njihova brzina mora da bude manja od brzine svetlosti, se nalaze izmedju ove dve svetske linije svetlosti. Ako ih zarotiramo oko ct ose dobijamo takozvani "svetlosni konus" (slika 6.18).

U vezi sa tom činjenicom, sve tačke koje se nalaze u svetlosnom konusu u pozitivnom delu vremenske ose pripadaju takozvanoj apsolutnoj budućnosti, a one koje su u njenom negativnom dleu apsolutnoj prošlosti. Tačke koje su van svetlosnog konusa su apsolutno udaljene jer u toj oblasti nije moguće kretanje, obzirom da bi se odvijalo brzinom većom od brzine svetlosti u vakuumu.

6.8.2 Vektori u prostoru Minkovskog

Kao što je već naglašeno, izraz (6.55) može da se predstavi kao skalarni proizvod vektora $d\vec{r}$ samim sobom, odnosno

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{6.57}$$

što je izraz koji sledi na osnovu osobine da je skalarni proizvod dva vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ definisanih preko dekartovih koordinata $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z = (A_x, A_y, A_z)$ i $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z = (B_x, B_y, B_z)$ jednak

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$. Obratimo pažnju da je skalarni proizvod jednak zbiru proizvoda odgovarajućih komponenti vektora u datom euklidskom prostoru, odnosno da se predznaci faktora A_xB_x, A_yB_y i A_zB_z poklapaju sa predznacima sabiraka dx^2, dy^2 i dz^2 u metrici (6.55).

Na osnovu ovoga se nameće zaključak da bi skalarani proizvod dva 4-vektora sa koordinatama $A = (A_0, A_x, A_y, A_z)$ i $B = (B_0, B_x, B_y, B_z)$ (gde su indeksom 0 označene vremenske komponente vektora), u prostoru Minkovskog trebalo definisati na sličan način, odnosno poštujući predznake koji se pojavljuju u metrici (6.56)

$$AB = A_0B_0 - A_xB_x - A_yB_y - A_zB_z. \tag{6.58}$$

Na osnovu ovog izraza, ukoliko definišemo 4-vektor položaja kao $R = (ct, x, y, z)$, kvadrat njegovog intenziteta bi bio

$$R^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

i očigledno je invarijantna u odnosu na Lorencove transformacije. Kvdratat intenziteta diferencijala vektora položaj će prema tome biti

$$dR^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

odnosno, kao što se i očekuje, svodi se na metriku (6.56)

6.8.3 4-vektori položaja i brzine

$$V = \frac{dR}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{dx}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{dz}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{dy}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$
$$V^2 = c^2$$

6.9 Primeri i zadaci

1. Foton se kreće u sistemu S' (koji se kreé u odnosu na sistem S konstantnom brzinom u duž x ose) brzinom $v'_x = c$. Kolika je njegova brzina merena iz sistema S.

   ⋄ Na osnovu formule *.*

$$v_x = \frac{c+u}{1+uc/c^2} = c$$

2. Foton se, gledano iz sistema reference S kreće duž y ose brzinom c. Kolika su komponente a koliki intenzitet njegove brzine merene u sistemu S'?

   $\diamond$ U sistemu S, komponenete brzine fotona su $v_x = 0$, $v_y = c$ i $v_z = 0$, dok se intenzitet brzine može dobiti iz

   $$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 0 + c^2 + 0 = c^2$$

   i iznosi $v = c$. Komponente brzine fotona merene iz sistema S' su

   $$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = -u, \quad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} = c\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad v'_z = 0$$

   Kvadrat intenziteta brzine fotona, u sistemu S' je, prema tome

   $$v'^2 = v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = (-u)^2 + c^2 + 0 = u^2 + (c\sqrt{1 - u^2/c^2})^2 + 0 = c^2,$$

   što znači da je njen intenzitet takodje jednak c.

3. Svemirski brod α se kreće brzinom 0,9c u odnosu na Zemlju. Svemirski brod β prolazi relativnom brzinom $0,5c$ kraj njega. Kolika je brzina svemirskog broda β u odnosu na Zemlju?

   $\diamond$ Ukoliko sistem S vežemo za Zemlju a S' za svemirski brod α (x ose ova dva sistema su orijentisane duž pravca kretanja brodova), onda će njegova brzina u osnosu na Zemlju biti $u = 0,9c$. Sa druge strane, brzina broda β je data u odnosu na brod α pa se može zapisati kao $v'_x = 0,5c$. Brzina broda β u odnosu na Zemlju je, prema tome,

   $$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{0,5c + 0,9c}{1 + 0,5c \cdot 0,9c/c^2} = 0,9655c.$$

4. Dve čestice se kreću u susret jedna drugoj brzinom $\pm 0,9c$ mereno iz nekog sistema reference. Kolika je brzina jedne čestice u odnosu na drugu?

   $\diamond$ Navedeni podaci o brzinam su dati u odnosu na neki inercijalni sistem reference S' čiju x' osu možemo da postavimo u pravcu kretanja čestica tako da će njihove brizne biti $v'_{1x} = 0,9c$ i $v'_{2x} = -0,9c$. Kako je potrebno odrediti brzinu jedne čestice u odnosu na drugu, potrebno je da definišemo novi referentni sistem koji će biti vezan za jednu od njih i kretati se zajedno sa njom. Ukoliko taj novi sistem S vežemo za česticu koja se, u odnosu na S' kreće briznom $-0,9c$, to znači da će istovremeno njegova brzina u odnosu na sistem S biti upravo tolika $(-0,9c)$. Gledano pak iz njega, brzina sistema S' će biti ista po intenzitetu ali sa suprotnim znakom, odnosno $u = 0,9c$, gde je sa u, kao i do sada, označena brzina kretanja sistema S' u odnosu na S. Na osnovu ovoga je tražena brzina

$$v_{1x} = \frac{v'_{1x}}{1 + uv'_{1x}/c^2} = \frac{0,9c + 0,9c}{1 + 0.9c \cdot 0.9c/c^2} = \frac{1,8c}{1,81} = 0,994c.$$

5. Dva tela se kreću brzinama $v_1 = 3/4c$ i $v_2 = 8/9c$. Odrediti brzinu drugog tela u odnosu na prvo ako se tela kreću u istom smeru. Kolika je njegova brzina ukoliko se tela kreću u suprotnim smerovima.

   ◇ Sistem reference S' ćemo vezati za prvo telo pa će njegova brzina biti $u = v_1$, dok će tražena brzina drugog tela u odnosu na prvo, v', biti
$$v' = \frac{v_2 - u}{1 - uv_2/c^2} = \frac{5}{12}c.$$

   Ukoliko pretpostavimo da se prvo telo kreće u pozitivnom smeru x ose, a drugo u suprotnom, tražena brzina je

$$v' = \frac{-v_2 - u}{1 - u(-v_2)/c^2} = -\frac{59}{60}c.$$

6. Putnik je krenuo sa Zemlje kosmičkim brodom brzinom $0,8c$. On šalje poruku na Zemlju u obliku dva svetlosna impulsa koji slede jedan za drugim u intervalu $10s$, po časovniku sa broda. Koliki je vremenski interval izmedju dolazaka impulsa na Zemlju meren po časovniku na Zemlji?

   ◇

7. Relativistička čestica kreće se brzinom v' u odnosu

8. Dužina svemirskog broda, merana u sopstvenom sistemu reference iznosi 120 m, dok mu je prečnik 20 m. Kolika mu je dužina i prečnik, mereno sa stanovišta posmatrača u odnosu na koga se brod kreće brzinom $0,99c$? Koliku će dužinu istog broda izmeriti drugi posmatrač u odnosu na koga se brod kreće brzinom $0.100c$.

   ◇ Prema jednačini (6.21), dužina koju će izmeriti posmatrač je

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 120m\sqrt{1 - \frac{(0,99c)^2}{c^2}} = 17m.$$

Prečnik svemirskog broda ostaje isti obzirom da se kretanje odvija pod pravim uglom u odnosu na njega.

Primenom iste formule se sa dužinu broda u odnosu na drugog posmatrača dobija $119,4$ m.

9. Automobil je dugačak $4,3$ m kada je parkiran. Koliko će biti dugačak za autostopera pored koga prolazi brzinom od 30 m/s?

   ⋄ Autostoper registruje da se dužina kola kontrahuje na dužinu

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx l_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

   gde je, obzirom na malu vrednost odnosa v^2/c^2, izvršen razvoj binoma $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ uz ograničenje na prva dva sabirka . Automobil je za autostopera kraći za razliku $l_0 - l$,

$$l_0 - l \approx \frac{l_0}{2}\frac{v^2}{2c^2} = \frac{4,3m}{2}\frac{(3\cdot 10^1 m/s)^2}{(3\cdot 10^8 m/s)^2} = 2,2\cdot 10^{-14} m.$$

   koja ima vrednost mnogo manju od veličine atoma.

10. Elementare čestice koje se nazivaju mioni (nose istu količinu naelekrisanje kao elektron, ali su oko 200 puta masivnije) nastaju u višim slojevima atmoefere kada kosmičko zračenje pogodi molekule vazduha. Mioni imaju srednje vreme života, u sopstvenom sistemu reference, $\tau' = 2,2\mu$s (nakon toga se raspadaju na elektron i odgovarajuće neutrine).

    Pretpostavimo da je mion nastao na visini od 50 km iznad površine Zemlje i da se kreće ka njoj brzinom 0,9998 c, da se (gledano iz njegovog sistema reference) raspada tačno nakon 2,2μ s kao i da se ne sudara ni sa čim na svom putu ka Zemlji. Da li će uspeti da stinge do Zemlje a da se ne raspadne?

    ⋄

11. Dva voza, A i B, svaki sopstvene dužine l, kreću se u istom pravcu i smeru. Brzina voza A je $4c/5$, a voza B $3c/5$. Voz A polazi nakon polaska voza B. Koliko dugo će, gledano iz sistema reference vezanog za Zemlju, trebati vozu A da pretekne voz B?

    ⋄ U odnosu na sistem reference C, vezan za Zemlju, γ faktori, pridruženi A i B su $5/3$ i $5/4$, respektivno. Usled toga, njihove dužine, u sistemu reference vezano za Zemlju su $3l/5$ i $4l/5$. Kako je voz A brži od voza B, doći će do sustizanja i preticanja, pri čemu voz A, kao dodatan put treba da predje put jednak zbiru dužina vozova, odnosno $7l/5$. Relativna brzina ova dva voza, gledano sa Zemlje, je jednaka razlici njihovih brzina, odnosno $c/5$, tako da je ukupno vreme

$$t_C = \frac{7l/5}{c/5} = \frac{7l}{c}.$$

12. Voz, sopstvene dužine L, se kreće brzinom $5c/13$ u odnosu na prugu. Lopta je bačena sa zadnje strane voza ka prednjoj brzinom od $c/3$ u odnosu na voz. Koliki put će preći pri tome i koliko joj je vremena potrebno za njega, mereno iz sistema reference vezanog za Zemlju?

   ◇

13. Svemirski brod se približava Zemlji brzinom $v = 4c/5$. Radarski signal emitovan sa broda, pogadja Zemlju i vraća se nazad na brod posle 12 dana. Koliko će još vremena proteći, mereno u svemirskom brodu, izmedju prijema radarskog signala i dolaska na Zemlju, pretpostavljajući da će se brod i dalje kretati istom brzinom? Radarski signal, koji je emitovao radar sa broda, registrovan je i na Zemlji. Koliki će vremenski interval proteći izmedju registrovanja tog signala i dolaska svemirskog broda na nju?

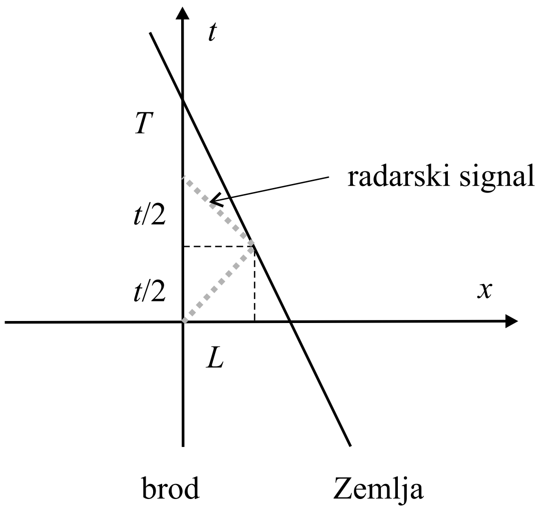
   ◇ Zadatak je zgodno rešavati u spostvenom sistemu reference broda. Odgovarajući prostorno-vremenski grafik je prikazan na slici 6.19

   Ako sa t označimo vreme koje je potrebno radarskom signalu da dodje do Zemlje, odbije se i vrati nazad na brod a sa L rastojanje Zemlje od broda u momentu kada je radarski signal došao na nju, važi

$$2L = ct,$$

   jer se signal kreće brzinom svetlosti. Kako se Zemlja kreće brzinom $v = 4c/5$, u sistemu reference vezanom za svemirski brod, ona je morala da predje rastojanje izmedju nje i broda (L) za preostalo vreme do njihovog susreta $T + t/2$, gde je sa T označeno vreme izmedju dolaska radarskog signala na brod i njegovog prispeća na Zemlju,

$$v\left(T + \frac{t}{2}\right) = L.$$



Slika 6.19:

Iz ove dve jednačine se za traženo vreme T (mereno u brodu) dobija

$$T = \frac{t}{2}\left(\frac{c}{v} - 1\right) = \frac{t}{8},$$

odakle ono iznosi 1,5 dan. U sopstvenom sistemu reference broda je vreme od momenta pristizanja signala na Zemlju do dolaska broda na Zemlju $\Delta\tau = T + t/2 = 5t/8$ a u "pokretnom" sistemu reference vezanom za Zemlju, usled dilatacije vremena

$$\Delta\tau' = \Delta\tau\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left(T + \frac{t}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{5t}{8}\frac{3}{5} = \frac{3}{8}t,$$

i iznosi 4,5 dana.

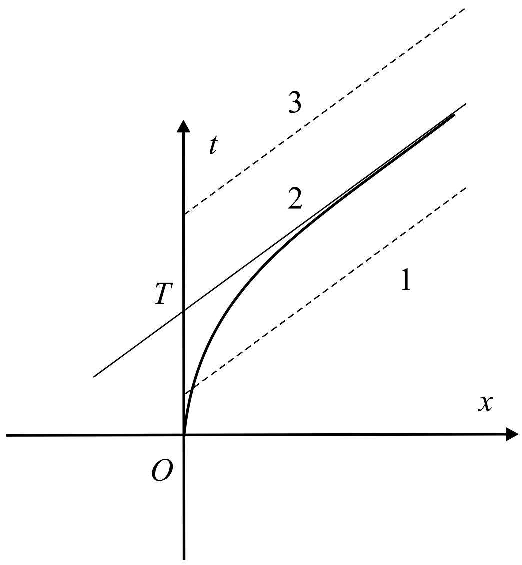
14. Astronaut kreće na putovanje svemirskim brodom ubrzavajući ga konstantnim ubrzanjem α koje, da bi putovanje bilo prijatnije, iznosi $9,8$ m/s^2. Udaljenost svemirskog broda sa vremenom, merena sa Zemlje, je data izrazom

$$x = \sqrt{c^2t^2 + \frac{c^4}{\alpha^2}} - \frac{c^2}{\alpha}.$$

U intervalima od po 24 sata, sa Zemlje se u pravcu leta broda šalju radio signali. Koliko njih će biti registrovano na brodu?

⋄ Obzirom na karakter kretanja broda, kada $t \to \infty$, njegova svetska linija se asimptotski približava svetskoj liniji svetlosti (linija broj 2 na prostorno-vremenskom dijagramu 6.20)

$$x = ct - \frac{c^2}{\alpha}.$$



Slika 6.20:

Ta svetska linija preseca Zemljinu svetsku liniju (koja je u njenom sistemu reference odredjena sa $x = 0$) u vremenskom trenutku $T = c/\alpha$ merenom od momenta polaska broda na put. Ma koji radio signal emitovan pre ovog vremenskog trenutka (za koji važi $t < T$), biće registrovan na brodu (jer će uspeti da ga sustigne - primer je signal predstavljen linijom 1 na dijagramu koja seče svetsku liniju broda). Svi radio signali, emitovani nakon vremena $T = t$, nikada neće sustići brod jer se njihove svetske linije ne seku (linija 3 na primer). Iz tog razloga će broj signala koje je astronaut registrovao biti

$$N = \frac{T}{t_0} = \frac{c}{\alpha t_0},$$

gde je $t_0 = 24$ h interval izmedju dva signala. Zamena brojčanih vrednosti daje

$$N = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{9,8 m/s^2 \cdot 24 \cdot 3600 s} = 354.$$

15. Inercijalan sistem reference S' se kreće u odnosu na inercijalan sistem reference S brzinom $\vec{u}_1 = u_1 \vec{e}_x$. Inercijalan sistem reference S'' se kreće u odnosu na inercijalan sistem reference S' brzinom $\vec{u}_2 = u_2 \vec{e}_x$. Izvesti Lorencove transfomracije koje povezuju dogadjaje u sistemima S'' i S.

   $\diamond$ Kako se svi sistemi kreću duž iste ose do rezultata se može doći primenom relativističkog izraza sa slaganje brzina na osnovu koga je brzina kretanja sistema S'' u odnosu na S, koja bi se pojavljivala u izrazima koji povezuju koordinate u jednom sa onima u drugom sistemu reference,

$$u = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}}.$$

   Do odgovarajućih Lorencovih transformacija se može doći i na postupan način koji se sastoji u ispisivanju transformacija koje povezuju S sa S' i S' sa S'' i eliminacijom koordinata sistema S'. Zadatak će

16. Svetlost se prostire kroz tečnost indeksa prelamanja n koja u odnosu na nekog posmatrača struji brzinom $u = 2,5 \cdot 10^{-8} c$. U nerelativističkom prilazu bi brzine svestlosti merene od strane posmatrača kada se ona kreé "nizvodno" odnosno uzvodno bile

$$V^+ = v' + u = \frac{c}{n} + u, \qquad V^- = v' - u = \frac{c}{n} - u.$$

   Fizoovi eksperimenti, izvršenim uglavnom 1851. godine su medjutim pokazali da ove brzine odstupaju od nerelativističkih izraza i da iznose

$$v^+ = \frac{c}{n} + \alpha u, \qquad v^- = \frac{c}{n} - \alpha u,$$

   gde je α koeficijent koji je u to vreme nazvan koeficijentom povlačenja etra sa vrednošću izmedju 0 i 1. Primenom relativističkih izraza za transformisanje brzina odrediti izraz koji opisuje veličinu α.

   $\diamond$ Kako je indeks prelamanja sredine n, brzina prostiranja svetlosti kroz nju je $v'_x = \frac{c}{n}$, pa je "nizvodna" brzina svetlosti

$$v^+ = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{c^2}\frac{c}{n}} = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{cn}}.$$

Kako je $u << c$ ovaj izraz se može razviti na sledeći način

$$v^+ = \frac{c}{n}\left(1+\frac{un}{c}\right)\left(1+\frac{u}{nc}\right)^{-1} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{un}{c}\right)\left(1-\frac{u}{nc}+\cdots\right)$$
$$= \frac{c}{n}\left(1+\frac{un}{c}-\frac{u}{nc}\right).$$

Odavde se za traženu brzinu dobija

$$v^+ = \frac{c}{n} + u\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

dok je "uzvodna" brzina

$$v^- = \frac{c}{n} - u\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

odakle je jasno da je tražena veličina

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

17. Formula jedan i motocikl se kreću pod pravim uglom, jedan u odnosu na drugoga, kao što je prikazano na slici 6.21 (brzine su date u odnosu na nepokretnog posmatrača na raskrsnici). Kolika je tražena bržina u nerelativističkoj fizici?

    Kojom brzinom se moticikl udaljava od formule jedan, gledano preko desnog ramena vozača formule?

    ⋄ U odnosu na nepokretan sistem reference S (vezan za put), relevantne brzine su

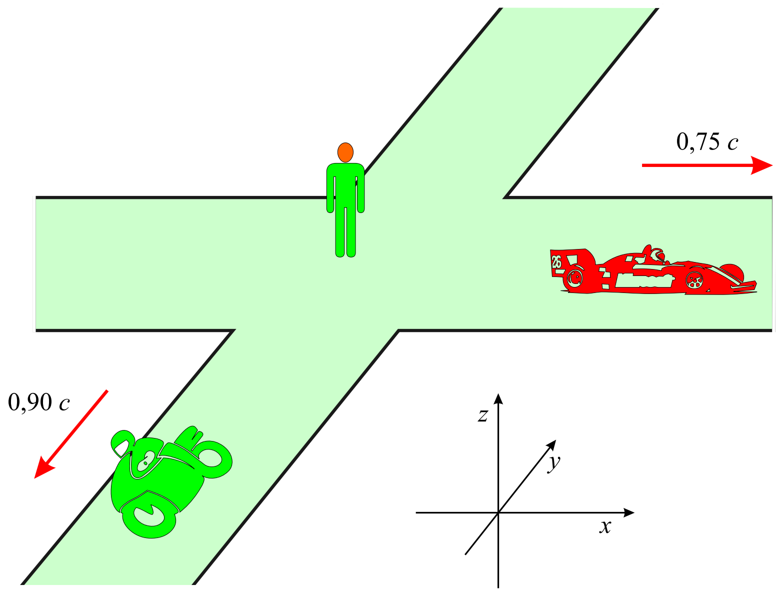
$$\text{Formula jedan:} v_x = 0,75c, \quad v_y = 0$$

$$\text{Motocikl:} v_x = 0, \quad v_y = -0,90c.$$

Da bi odredili kojom brzinom se motocikl udaljava od formule, pretpostavićemo da se sistem reference S' kreće sa formulom jedan, i odredićemo komponente u_x' i u_y' brzine motocikla u odnosu na njega. Dobija se

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1-\frac{v_x u}{c^2}} = \frac{0-0,75c}{1-\frac{(0)(0,75c)}{c^2}} = -0,75c$$

$$v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\frac{v_x u}{c^2}} = \frac{-0,90c\sqrt{1-(0,75c)^2/c^2}}{1-\frac{(0)(0,75c)}{c^2}} = -0,60c$$



Slika 6.21: .

Na taj način će brzina motickla, gledano iz sistema reference formule jedan, biti

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{(-0,75c)^2 + (-0,60c)^2} = 0,96c.$$

Ukoliko se za odredjivanje ove brzine iskoristi Galilejev zakon slaganja brzina, dobija se $v' = 1,2c$.

18. Dva svemirska broda se kreću jedan prema drugom. Posmatrač sa Zemlje je izmerio da su im brzine $0,750c$ i $-0,850$. Odrediti brzinu broda koji se približava Zemlji u sistemu reference broda koji se udaljava od nje.

19. Odrediti rezultat sabiranja n kolinearnih brzina v_1, v_2, ..., v_n. Koliki je rezultat ako su one jednake?

20. Cilindar rotira oko svoje ose ugaonom brzinom ω'. Pokazati da je, za posmatrača koji se kreće duž ose cilindra brzinom u, cilindar uvrnut i odrediti veličinu tog uvrtanja po jedinici dužine.

21. **Aberacija svetlosti.** Precizna astronomska merenja su pokazala da svaka zvezda na nebeskom svodu u toku godine opiše jednu malu

elipsu. Uzrok ovoj pojavi leži u konačnoj brzini prostiranja svetlosti i u relativnom kretanju Zemlje u odnosu na zvezde i time izazvanom menjanju pravca prostiranja svestlosnih signala u toku godine za posmatrača za Zemlje.[46] Ovu pojavu je prvi zapazio 1725. godine britanski astronom Bradley i zaključio da ona ne zavisi od položaja Zemlje, već od smera njene brzine na putanji oko Sunca.

Neka je S sopstveni sistem zvezde, i neka je S' trenutni sistem reference Zemlje koji se, u datom trenutku kreće brzinom $\vec{u}$ u odnosu na S.[47]

22. Štap sopstvene dužine l_0, nalazi se u stanju mirovanja u odnosu na sistem reference S u xy ravni pod uglom $\theta = arctan(3/4)$ u odnosu na x osu. Sistem reference S' se kreće brzinom $\vec{v} = v\vec{e}_x$ u odnosu na sistem S i posmatrano iz njega štap je nagnut pod uglom 45^o u odnosu na x' osu. Koliki je intenzitet brzine sistema S' i kolika je dužina štapa l' merena iz istog sistema reference?

$\diamond$

$$\tan\theta' = \frac{y'}{x'}$$

$$y' = y, \quad x' = \frac{x}{\gamma}$$

$$\tan\theta' = \gamma\frac{y}{x}\gamma\tan\theta$$

$$\gamma = \frac{\tan\theta'}{\tan\theta} = \frac{4}{3}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$l'^2 = y'^2 + x'^2 = y^2 + \frac{x^2}{\gamma^2} = y^2 + x^2(1-\beta^2) = l_0^2 - x^2\beta^2 = l_0^2(1-\cos^2\theta\beta^2)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{4}{5}$$

$$l' = l_0\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

[46]Sa pojavom aberacije se svi srećemo u vezi sa padanjem kišnih kapi. Naime, ako kišne kapi padaju vertikalno brzinom $\vec{w}$, za posmatrača koji se kreće horizontalno brzinom $\vec{u}$, one dolaze pod uglom $\arctan(u/w)$ u odnosu na vertikalu. To je ugao pod kojim naginjemo kišobran da bi se zaštitili od kišnih kapi.

[47]Jasno je da je sistem reference Zemlje neinercijalna, ali, u dovoljno kratkom vremenskom intervalu se on može smatrati inercijalnim sistemom koji se kreće brzinom

23. Koordinatni početci dva inercijalna sistema reference S i S' su se, u momentu vremena $t = t' = 0$ poklapali. Koordinanti početak sistema S' se kreće brzinom $u = 1,8 \cdot 10^8 m/s$ duž pozitivnog smera z ose sistema S. Koordinate nekog dogadjaja u S' su $x' = 1m$, $y' = 3m$, $z' = 2m$ i $t' = 8s$. Odrediti koordinate istog dogadjaja u S.

24. Vasionski putnik odlazi da istraži zvezdu koja se nalazi 96 svetlosnih godina daleko od Zemlje. On za kratko vreme ubrza brod do $v = 0,96c$, i putuje po pravoj liniji. Nakon 100 godina (mereno u sistemu reference vezanom za Zemlju), on naglo uspori brod do $v = 0$ i narednih 20 godina se bavi istraživanjima zvezdanog sistema u koji je došao. Nakon završetka istraživanja ponovo naglo ubrzava brod (u smeru ka Zemlji) do brzine $v = 0,96c$, putuje narednih 100 godina i uspori brod kada bude blizu Zemlje. Nacrtati prostorno-vremenski dijagram svetske linije astronauta, gledano sa Zemlje. Vreme prikazati u godinama a rastojanja u svetlosnim godinama.

25. Neka se svemirski brod kreće pravo ka Zemlji polovinom brzine svetlosti i pri tom emituje laserski snop, u smeru svog kretanja, koji se u odnosu na njega kreće brzinom c. Izračunati brzinu laserskog snopa u odnosu na Zemlju.

   ◇ Uz standardnu orijentaciju osa, ukoliko je sistem S vezan za Zemlju a S' za svemirski brod, brzine navedene u zadatku su $u = -\frac{1}{2}c$, $v'_x = -c$, tako da je brzina laserskog snopa u odnsu na Zemlju

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{v'_x}{u}c^2} = \frac{-c - \frac{1}{2}c}{1 + \frac{(-\frac{1}{2}c)(-c)}{c^2}} = -\frac{\frac{3}{2}c}{1 + \frac{1}{2}} = -c.$$

   Vredno je napomenuti da bi nerelativistička vrednost za traženu brzinu svetlosnog signala bila

$$v_x = v'_x + u = -c - \frac{1}{2}c = -\frac{3}{2}c.$$

26. Brod koji se približava Zemlji brzinom $\frac{1}{2}c$ izbacuje predmet brzinom $\frac{3}{4}c$. Kolikom brzinom se taj predmet kreće u odnosu na Zemlju ukoliko je izbačen u smeru nje a kolika mu je brzina ako je izbačen u smeru suprotnom od nje?

   ◇ Ukoliko je telo izbačeno u smeru Zemlje, brzine relevantne za rešavanje zadatka su $u = -\frac{1}{2}c$ i $v'_x = -\frac{3}{4}c$. U tom slučaju je brzina tela u odnosu na Zemlju

$$v_x = -\frac{10}{11}c = -0,909c$$

. Ukoliko je smer izbacivanja tela suprotan, važi da je $v'_x = \frac{3}{4}c$ pa je tražena brzina

$$v_x = \frac{2}{5}c = 0,4c.$$

27. Posmatrano iz laboratorijskog sistema reference, telo koje se kreće brzinom v_1 naleće pod pravim uglom na zid koji se kreće ka njemu brzinom V. Odrediti brzinu tela v_2 nakon odbijanja od zida. Sudar je apsolutno elastičan a masa zida mnogo veća od mase tela. Proanalizirati granične slučajeve. Odrediti brzinu v_2, ako je $v_1 = V = c/3$.

$\diamond$ Usmerimo x ose laboratorijskog sistema S kao i sistema S' vezanog za zid u smeru brzine v_1. Relacija koja daje x komponentu brzine tela, posmatrano iz sistema S' je

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2}$$

gde je u brzina sistema S' u odnosu na sistem S. Obzirom na orijentaciju osa, biće $v_x = v_1$, $u = -V$, pa će u sistemu reference vezanom za zid, brzina tela v'_1 biti

$$v'_1 = \frac{v_1 + V}{1 + v_1 V/c^2}.$$

Kako zid možemo smatrati beskonačno masivnim, nakon elastičnog suadra, prema zakonu održanja energije, telo će se odbiti u suprotnom smeru sa istom vrednošću brzine u odnosu na zid

$$v'_2 = -v'_1 = -\frac{v_1 + V}{1 + v_1 V/c^2}.$$

Vratimo se sada u laboratorijski sistem reference S. U njemu je

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + v'_x u/c^2}$$

pri čemu je $u = -V$, jer se sistem S' kreće ka sistemu S. Na osnovu ovoga je tražena brzina

$$v_2 = \frac{v'_1 - V}{1 - v'_1 V/c^2} = -\frac{v_1(1 + V^2/c^2) + 2V}{1 + 2v_1 V/c^2 + V^2/c^2}.$$

Analiza graničnih slučajeva:

1. Brzine tela i zida su male ($v_1 << c$ i $V << c$). U tom slučaju možemo da zanemarimo sve sabirke u kojima se ove brzine dele brzinom svetlosti, i tada se iz gornje jednačine dobija nerelativistički rezultat $v_2 = -(v_1 + 2V)$. Drugim rečima, brzina tela nakon odbijanja se povećava za dvostruku vrednost brzine zida i usmerena je suprotno od početne brzine.

2. Neka na zid naleće telo koje se kreće brzinom svetlosti (na primer laserska svetlost koja se odbija od pokretnog ogledala). Rezultat se dobija kada se u poslednji izraz zameni $v_1 = c$

$$v_2 = -\frac{c(1 + V^2/c^2) + 2V}{1 + 2cV/c^2 + V^2/c^2} = -c\frac{(1 + V/c)^2}{(1 + V/c)^2} = -c.$$

Drugim rečima, brzina laserske svetlosti je promenila smer ali ne i intenzitet.

3. Neka se zid kreće brzinom svetlosti brzinom. U tom slučaju je

$$v_2 \to -\frac{2v_1 + 2c}{2 + 2Vc/c^2} = -c,$$

odnosno, nakon odbijanja, telo će se kretati brzinom bliskoj brzini svetlosti.

4. Tražena brzina tela, za $v_1 = V = c/3$ je

$$v_2 = -\frac{\frac{1}{3}(1 + \frac{1}{9}) + \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9}} = -\frac{7}{9}c = -0,78c.$$

28. Solarna konstanta (energija zračenja koje sa Sunca pada na jedinicu površine Zemlje u jedinici vremena) iznosi $C = 1,4kW/m^2$. Odrediti masu Δm, koju usled zračenja Sunce izgubi za jednu godinu.

$\diamond$ Zemlja se od Sunca nalazi na rastojanju $L_Z = 1,48 \cdot 10^{11}$ m. Za vreme Δt na jedinicu površine Zemlje padne energija $C\Delta t$. Množeći ovaj izraz površinom sfere poluprečnika L_Z, dobijamo energiju koju Sunce izrači za vreme Δt

$$\Delta E = 4\pi L_Z^2 C\Delta t.$$

Ova energija nastaje usled termonuklearnih reakcija u Suncu na račun umanjenja njegove mase mirovanja. Na taj način, njegova masa će se za jednu godinu smanjiti za

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4\pi L_Z^2 C \Delta t}{c^2} = \frac{4\pi(1,48 \cdot 10^{11})^2 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \cdot 3,16 \cdot 10^7}{(3 \cdot 10^8)^2}$$

$$\Delta m = 1,35 \cdot 10^{17} kg.$$

Kako Sunce postoji oko 5 milijardi godina, ono je za to vreme izgubilo $5 \cdot 10^9 \cdot 1,35 \cdot 10^{17} kg \approx 6,75 \cdot 10^{26}$ kg. Imajući u vidu da je masa Sunca $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, ono je do sada zračenjem izgubilo oko $0,03$ % nje.

29. Čestica mase mirovanja m i kinetičke energije T_0 se elastično rasejava na stacionarnu v cesticu iste mase. Kolika je njena kinetička energija nakon sudara, ako je ugao rasejanja θ?

$\diamond$ Neka indeksi 0 i 1 označavaju česticu projektil i česticu metu. 4-impulsi do i posle sudara su prema zakonu održanja 4-vektora impulsa

$$P_0 + P_1 = P_0' + P_1'.$$

Kako nas zanima veličina u vezi sa česticom 0 nakon sudara, prebacićemo njen impuls na levu stranu i kvadrirati

$$(P_0 + P_1 - P_0')^2 = P_1,$$

$$P_0^2 + P_1^2 + P_0'^2 + 2P_0P_1 - 2P_0P_0' - 2P_1P_0' = P_1^2.$$

Kako je kvadrat 4-impulsa jednak m^2c^2, ova jednačina postaje

$$3m^2c^2 + 2P_0P_1 - 2P_0P_0' - 2P_1P_0' = m^2c^2.$$

Izraze 4-vektora impulsa

$$P_0 = (E/c, \vec{p}), \quad E = mc^2 + T_0$$

$$P_1 = (mc, \vec{0}),$$

$$P_0' = (E'/c, \vec{p}'), \quad E' = mc^2 + T', \quad \vec{p} \cdot \vec{p}' = pp' \cos\theta.$$

zamenjujemo u jednačinu i dobijamo

$$m^2c^2 + \frac{E}{c}mc - \frac{E}{c}\frac{E'}{c} + \vec{p} \cdot \vec{p}' - \frac{E'}{c}mc = 0,$$

odnosno

$$pp'\cos\theta = \left(\frac{E'}{c} - mc\right)\left(\frac{E}{c} + mc\right).$$

Kako se veza impulsa i energije može zapisati u obliku $p = \sqrt{E^2/c^2 - m^2c^2}$, dobijamo

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2\right)^{1/2}\left(\frac{E'^2}{c^2} - m^2c^2\right)^{1/2}\cos\theta = \left(\frac{E'}{c} - mc\right)\left(\frac{E}{c} + mc\right).$$

Kvadriranje jednačine i razlaganje razlike kvadrata dovodi do relacije

$$\left(\frac{E}{c} - mc\right)\left(\frac{E'}{c} + mc\right)\cos^2\theta = \left(\frac{E'}{c} - mc\right)\left(\frac{E}{c} + mc\right),$$

koja, obzirom na vezu ukupne i kinetičke energije daje

$$T_0(T' + 2mc^2)\cos^2\theta = T'(T_0 + 2mc^2),$$

odakle je kinetička energija čestice nakon rasejanja

$$T' = \frac{2mc^2T_0\cos^2\theta}{2mc^2 + T_0\sin^2\theta}.$$

30. Foton talasen dužine λ naleće na stacionaran elektron (mase m_e) i nakon rasejanja pod uglom θ ima talasnu dužinu λ'. Odrediti promenu talasne dužine fotona.

$\diamond$ Na osnovu zakona održanja 4-impulsa

$$P_e + P_f = P'_e + P'_f$$

gde su apostrofom označene vrednosti veličina nakon rasejanja. Kako nas ne zanima 4-impuls elektrona nakon rasejanja, jednačinu ćemo tako zapisati da on ostane na desnoj strani jednačine a nju ćemo još i kvadrirati

$$(P_e + P_f - P'_f)^2 = P'^2_e.$$

Kako je uvek $P_f^2 = 0$ a $P_e^2 = m_e^2c^2$, sledi

$$m_e^2c^2 + 2P_eP_f - 2P_eP'_f - 2P_fP'_f = m_e^2c^2.$$

4-vektori koji se pojavljuju u ovom izrazu, u laboratorijskom sistemu reference (u kome miruje elektron-meta) su

$$P_e = (m_ec, \vec{0}), \quad P_f = \left(\frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda}\vec{e}_f\right), \quad P'_f = \left(\frac{h}{\lambda'}, \frac{h}{\lambda'}\vec{e}\,'_f\right),$$

($\vec{e}_f$ i $\vec{e}'_f$ su jedinični vektori pravca upadnog i rasejanog fotona, respektivno), pa se nakon množenja dobija relacija

$$m_e c\frac{h}{\lambda} - m_e c\frac{h}{\lambda'} - \frac{h^2}{\lambda\lambda'} + \frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta = 0.$$

Nakon množenja ove jednačine sa $\lambda\lambda'$, promena talasne dužine može da se zapiše u uobičajenom obliku

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta).$$

31. Ako je veza koordinata x' i t' sa x i t predstavljena izrazom (6.27), odrediti izraze koji definišu kooridnate x i t preko x' i t'.

    ⋄ Zadatak se svodi na rešavanje sistema dve linearne jednačine (6.27) po x i t. Množenje prve sa $-M/A$ i dodavanje drugoj dovodi do

    $$-\frac{M}{A}x' + t' = -B\frac{M}{A}t + Nt$$

    odakle se dobija

    $$t = \frac{Mx' - At'}{BM - AN}.$$

    Analogno, množenje prve jedančine sa $-N/B$ i dodavanje drugoj, nakon sredjivanja za x daje

    $$x = \frac{-Nx' + Bt'}{BM - AN}$$

    što predstavlja tražene veze promenljivih ova dva sistema, odnosno inverznu transformaciju, transformaciji koordinata (6.27).

32. **Paradoks blizanaca** Pretpostavimo da kosmički brod kreće sa Zemlje u tački A, ubrzava i odlazi od nje duž x ose brzinom u. Kada dodje u neku tačku B, okreće, kreće se ka Zemlji istom brzinom, koči i zaustavlja se u istoj tački iz koje je pošao. Recimo da smo za Zemlju vezali koordinatni sistem S sa osama xyz, sa brodom kada se udaljava S' sa osama $x'y'z'$, a sa brodom kada se približava S'' sa osama x'', y'', z''. Uporedimo interval vremena Δt_Z izmedju odlaska i dolaska broda koji bi izmerio sat koji je na Zemlji sa satom koji se nalazi na brodu Δt_b.[48]

[48]Pretpostavka je da će satovi dobro raditi u svim sistemima reference.

Interval vremena izmedju pomenuta dva dogadjaja, izmeren na Zemlji je

$$\Delta t_Z = t_{2A} - t_{1A}, \tag{6.59}$$

gde je sa t_{1A} označen trenutak odlaska broda sa Zemlje, meren po zemaljaskom satu, a sa t_{2A} trenutak povratka u istu tačku na Zemlji. Pogodno je podeliti kretanje broda na dve etape, jedna se odnosi na kretanje sa Zemlje i dolazak u tačku B koji se dešava u trenutku t_B a druga je polazak iz tačke B i povratak na Zemlju. Potreban interval vremena za prvu etapu puta je $\Delta t_{AB} = t_B - t_{1A}$, a za drugu $\Delta t_{BA} = t_{2A} - t_B$, pa je vreme (6.59)

$$\Delta t_Z = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BA} = (t_B - t_{1A}) + (t_{2A} - t_B). \tag{6.60}$$

Vremena merena u S' i u S'' su sa vremenom merenim u S su povezana na sledeći način[49]

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad t'' = \frac{t + \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{6.61}$$

Sada treba izračunati interval vremena koji je svojim satom izmerio kosmonaut koji se nalazio u brodu. Obzirom na karakter njegovog kretanja logično ga je podeliti takodje na dve etape pa će ukupno vreme koje je on izmerio biti

$$\Delta t_b = \Delta t' + \Delta t'', \tag{6.62}$$

gde je $\Delta t' = t'_B - t'_{1A}$ vreme koje mu je po njegovom satu trebalo da dodje od tačke A' do tačke B', a $\Delta t'' = t''_{2A} - t''_B$, vreme koje mu je bilo potrebno (po njegovom satu) da dodje od tačke B'' do tačke A''.

Obzirom na relacije (6.61) pomenuti intervali vremena su

$$\Delta t' = t'_B - t'_{1A} = \frac{t_B - \frac{u}{c^2}x_B}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t_{1A} - \frac{u}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_B - t_{1A} + \frac{u}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

$$\Delta t'' = t''_{2A} - t''_B = \frac{t_{2A} + \frac{u}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t_B + \frac{u}{c^2}x_B}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_{2A} - t_B + \frac{u}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{6.63}$$

[49]Predznak brzine u drugom izrazu je negativan jer se u tom slučaju kretanje odvija ka Zemlji.

Imajući u vidu da je

$$\frac{x_B - x_A}{t_B - t_{1A}} = u, \quad \frac{x_A - x_B}{t_{2A} - t_B} = -u,$$

zamenom u (6.63), za traženo vreme se dobija

$$\Delta t_b = (t_B - t_{1A}) \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + (t_{2A} - t_B) \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{6.64}$$

odnosno

$$\Delta t_b = [(t_B - t_{1A}) + (t_{2A} - t_B)] \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \Delta t_Z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{6.65}$$

Ovaj zadatak se može rešiti i sa pozicije kosmonauta koji se nalazi u brodu. Sat koji miruje u odnosu na brod, pokazuje njegovo spostveno vreme pa je

$$\Delta t_b = \Delta t_0' + \Delta t_0''. \tag{6.66}$$

Vreme mereno prema zemaljskom satu je

$$\Delta t' + \Delta t'' = \frac{\Delta t_0'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{\Delta t_0''}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_b}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{6.67}$$

što se poklapa sa formulom (6.65).

Na ovaj način se vidi da, bez obzira na način izračunavanja, vreme u kosmičkom brodu teče sporije nego na Zemlji. Kad bi brzina broda bila $u = 0,9998c$, vreme će teći oko 50 puta sporije ($\Delta t_b = 1/50 \Delta t_Z$). Kao posledica te činjenice, ukoliko bi jedan blizanac otišao ovom brzinom na putovanje kosmosom, i pri tom (po svom kalendaru) ostareo 1 godinu, njegov brat koji je ostao na Zemlji bi ostareo 50 godina.[50]

Dobijeni rezultat se naziva paradoksom blizanaca[51] zato što na prvi pogled ne bi trebalo da postoji nikakvo usporavanje protoka vremena

[50] Usporavanje protoka vremena u kosmičkog brodu koji se kreće veoma brzo, daje principijelnu mogućnocst putovanja ka dalekim zvezdanim sistemima (naravnom, o ovim putovanjima ljudi koji bi ostali na Zemlji ne bi mogli ništa da saznaju). Primetimo da danas nisu poznati tehnički uslovi (npr. koji bi izvori energije obezbedili ovakvo putovanje) koji bi mogli da obezbede da se kosmički brod ubrza do ultrarelativističkih brzina. Ovo tim re jer je i ubrzavanja elementarnih čestica do tih brzina kompleksan i teško rešiv problem.

[51] Ovaj paradoks se pripisuje Lanževenu a ne Ajnštajnu.

obzirom na princip relativnosti.[52] Medjutim treba imati u vidu da se za kretanje kosmičkog broda vezuju dva različit sistema reference (a ne jedan) koji se kreću istim ali suprotno usmerenim brzinama tako da je princip relativnosti neprimenljiv. Moguće je kritikovati takodje nužnu pojavu ubrzavanja i usporavanja broda na polasku, prilikom okretanja i na dolasku na Zemlju, što znači da se tada on nalazio u neinercijalnom sistemu reference. Medjutim, kada je kretanje broda neravnomerno vreme se takodje usporava što je jedan od rezultata opšte teorije relatinosti.

33. Ogledalo se kreće normalno na svoju ravan brzinom u. Na njega pada svetlosni zrak pod uglom θ u odnosu na normalu na ogledalo (gledano iz inercijalnog sistema reference u odnosu na koji se ogledalo kreće navedenom brzinom). Koliki će biti ugao pod kojim se zrak refelektuje od ogledala? Da li će se pri ovakvoj refleksiji promeniti frekvenca svetlosti?

   $\diamond$

34. ISR S' se kreće u odnosu na ISR S brzinom $\vec{u}_1 = u_1\vec{e}_x$. ISR S" se kreće u odnosu na ISR S' brzinom $\vec{u}_2 = u_2\vec{e}_x$. Izvesti Lorencove transformacije koje povezuju dogadjaje u u sistemima S i S".

   $\diamond$

35. Odrediti matricu Lorencovih

   $\diamond$

[52] Nije bilo merljivo tada ali u GPS satelitima moraju da se koriguje rad časovnika.

Glava 7

Dinamika specijalne teorije relativnosti

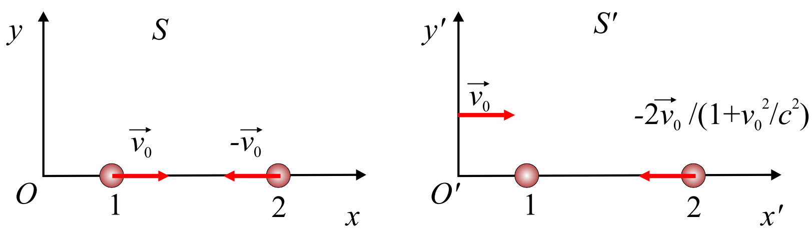
7.1 Relativistički izraz za impuls i II Njutnov zakon

Do sada je pokazano da korektno opisivanje kretanja čestice koja se kreće velikom brzinom dovodi do potrebe da se Galilejeve transformacije zamene Lorencovim. Kako osnovni zakoni fizike moraju da ostanu neizmenjeni prilikom promene sistema reference, potrebno je generalisati Njutnove zakone, definiciju impulsa i energije tako da imaju formu koja se održava prilikom primene Lorencovih transformacija. Te "nove" definicije moraju da budu takve da se, u situaciji kada je brzina tela mala u poredjenu sa brzinom svetlosti, svode na dobro poznate, nerelativističke formule.

Prema zakonu održanja impulsa, ukupan impuls sistema, ostaje konstantan tokom vremena. Tipičan primer primene ovog zakona je posmatranje sudara dva tela (elastičan i neelastičan). Ipostavlja se da, ukoliko podjemo od nerelativističke definicije impulsa $\vec{p} = m\vec{v}$, zakon održanja impulsa ne važi. Da bi se uverili u to razmotrimo neelastičan sudar dve jednake lopte mase m, slika 7.1.

Neka se u sistemu S lopte kreću jedna drugoj u susret duž x ose brzinama jednakog intenziteta a suprotnog smera, čije su projekcije prema tome $v_{x1} = v_0$ i $v_{x2} = -v_0$. Impuls sistema je prema tome, u sistemu S pre sudara jednak $mv_0 + m(-v_0) = 0$. Nakon neelastičnog sudara, lopte se slepljuju i zaustavljaju,[1] pa su im komponente brzina $v_{x1} = v_{x2} = 0$. Kao što vidimo

[1] Kinetička energija koje su lopte imale pre sudara u potpunosti se troše na energiju



Slika 7.1: Neelastični sudar istih tela.

ukupni impuls sistema je nakon sudara jednak nuli što znači da je u ovom inercijalnom sistemu reference impuls sistema očuvan. Da li je tako i u ostalim inercijalnim sistemima reference?[2] Razmotrimo ovaj isti sudar iz sistema S' prikazanog na istoj slici, koji se kreće uniformno brzinom $\vec{v}_0$ u odnosu na sistem S duž x-ose.

Situacija pre sudara je sledeća. Primenjujući formulu (*.*) za x komponentu brzine tela, gledano iz sistema S', za brzine dveju lopti pre sudara se dobija

$$v'_{x1} = 0, \quad v'_{x2} = -\frac{2v_0}{1 + \frac{v_0^2}{c^2}},$$

dok se za njihove brzine nakon sudara dobija $v'_{x1} = v'_{x2} = -v_0$. Na osnovu toga možemo da zaključimo da je ukupni impuls ovog sistema, posmatrano iz sistema S', pre sudara bio jednak $-2mv_0/(1 + v_0^2/c^2)$, a da je posle sudara $-2mv_0$, što znači da, u opštem slučaju nisu jednaki![3] Zakon održanja impulsa, kao jeda od osnovnih zakona fizike medjutim mora da važi u svim inercijalnim sistemima reference.[4] To nas dovodi do zaključka da treba modifikovati definiciju impulsa. Pri tome je neophodno da poštujemo sledeće zahteve:

- Zakon održanja impulsa mora da ostane u važnosti.
- Relativistički izraz za impuls $\vec{p}$ treba da za male brzine poprimi oblik $m\vec{v}$.

---

deformacije lopti i njihovo zagrevanje na mestu dodira, odnosno sudara.

[2]Da bi dokazali suprotno dovoljno je da pronadjemo makar jedan u kome impuls nije očuvan.

[3]Lako je pokazati da su ova dva izraza jednaka samo kada je $v_0 << c$, odnosno za male brzine kretanja tela.

[4]Primetimo da smo prilikom povezivanja vrednosti impulsa u različitim inercijalnim sistemima reference takodje koristili relativistički zakon transformacija brzina. Ove relacije, budući da su povezane sa Ajnštajnovim postulatima koji su pak bazirani na empiriji, takodje moramo uzeti kao tačan.

Odgovarajuća relativistička verzija impulsa, koja zadovoljava navedene uslove je

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{v} \tag{7.1}$$

gde je m masa čestice a $\vec{v}$ njena brzina. Kada je brzina kretanja tela mala u poredjenju sa briznom svetlosti $v << c$, faktor γ u prethodnom izrazu teži jedinici pa izraz za impuls postaje jednak nerelativističkom.[5] Do relativističkog izraza za impuls (7.1) se može doći i sledećim razmišljanjem. Za male brzine kretanja tela traženi izraza za impuls mora bude jednak nerelativističkom impulsu $\vec{p} = md\vec{r}/dt$. Kako je interval dt povezan sa sopstvenim vremenom čestice relacijom $dt = d\tau/\sqrt{1-v^2/c^2}$, logično je impuls čestice definisati kao $\vec{p} = md\vec{r}/d\tau$, odakle se odmah dobija relacija (7.1).[6]

Masa m koja ulazi u relaciju (7.1) je invarijanta, i prema tome ne zavisi od brzine čestice. Ovaj izraz se, medjutim, može i malo drugačije interpretirati. Naime, impuls se, po analogiji sa Njutnovom mehanikom, može predstaviti kao proizvod mase tela i njegove brzine

$$\vec{p} = m_r\vec{v}, \tag{7.2}$$

ali masa m_r koja se pojavljuje u ovom izrazu, očigledno nije invarijantna veličina, već zavisi od brzine na sledeći način

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m. \tag{7.3}$$

U takvoj interpretaciji izraza za impuls, invarijantna masa m se naziva masom mirovanja (i često označava sa m_0). Neinvarijanta masa m_r, u tom slučaju, nosi naziv relativistička masa ili masa kretanja.

Imajući u vidu ovakvu definiciju relativističkog impulsa, drugi Njutnov zakon se može pisati u uobičajenoj formi

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{7.4}$$

Ovakva zapis je logičan jer za male brzine kretanja prelazi u uobičajen izraz drugog Njutnovog zakona, a osim toga, u slučaju da je sistem izolovan ($\vec{F} = 0$), dovodi do zakona održanja impulsa i u relativističkom i u nerelatvističkom slučaju.

---

[5] Može se pokazati i da iz ovakve definicije impulsa sledi da važi i zakon njegovog održanja pa je u tom smislu on dakle invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije.

[6] Napomenimo da je u ovoj definiciji $d\vec{r}$ pomeraj čestice u onom sistemu reference u kome odredjujemo impuls $\vec{p}$, dok je interval vremena $d\tau$ interval izmeren na časovniku koji se kreće zajedno sa česticom.

Može da se pokaže da u relativističkom slučaju, ubrzanje čestice pod dejstvom konstante sile opada sa porastom brzine kao

$$a \propto (1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}.$$

Ova formula je u skladu sa postulatom o brzini svetlosti jer pokazuje da kada brzina čestice teži brzini c, ubrzanje izazvano dejstvom konstantne sile teži nuli. To ukazuje na činjenicu da je nemoguće ubrzavanje čestice iz stanja mirovanja do brzine $v \geq c$.

Primer 1. Elektron mase $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg kreće se brzinom $0,75c$. Odrediti i uporediti njegov relativistički i nerelatvistički impuls.

Rešenje. Prema jednačini (7.1) za $v = 0,75c$, se dobija

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3,10 \times 10^{-22} kgm/s.$$

Nereletavistička vrednost impulsa je

$$p_{nerel} = m_e v = 2,05 \times 10^{-22} kgm/s,$$

odakle se vidi da je tačna (relativistička) vrednost impulsa za 50% veća od klasičnog, odnosno nerelativističkog rezultata.

7.2 Relativistička energija

Zakon održanja energije je jedan od najvažnijih zakona u fizici. Kao sto je i ranije napominjano, prema njemu ukupna energija sistema ostaje kontantna tokom vremena a razne forme energije koje je čine, pri tome samo prelaze jedan u drugu. U slučaju tela koja se kreću relativističkim brzinama, zakon održanja energije, kao jedan od osnovnih zakona u fizici, mora da ostane u važnosti. Da bi ovo bilo obezbedjeno neophodno je uvesti novu definiciju ukupne energije koja mora da bude takva da sadrži u sebi nerelativistički izraz za energiju (za male brzine). Ajnštajn je pokazao da je zakon održanja energije ostaje u važnosti i za relativističke brzine ukoliko se ukupna energija predstavi u obliku

$$E = \gamma mc^2. \tag{7.5}$$

Kao što ćemo kasnije pokazati, ovakva definicija ukupne energije će imati i neke potpuno nove i neočekivane posledice.

Do Ajštajnovog izraza za ukupnu energiju se može doći na više načina. Ovde će biti prezentovana dva, najpre jedan intuitivniji i prostiji.

Ukoliko je brzina kretanja tela mala u poredjenju sa brzinom svetlosti, u izrazu (7.5), se može izvršiti razvoj po stepenima odnosa v/c koji daje

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+O(v^4/c^4)\right)$$

gde je sa $O(v^4/c^4)$ označen ostatak razvoja koji je reda veličina v^4/c^4 te se na dalje može, kao veoma mali sabirak, zanemariti. Nakon toga, prethodni izraz postaje

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2+\frac{1}{2}mv^2 = const. + E_k, \tag{7.6}$$

gde sabirak $mv^2/2$ prepoznajemo kao nerelativističku kinetičku energiju E_k. Kao što može da se primeti, u izrazu (7.6), koji važi za male brzine, uz izraz za nereltavističku kinetičku energiju se pojavio još jedan sabirak koji, obzirom da je oblika mc^2 i da ima dimenzije energije, možemo nazvati energija mirovanja. Sabirak γmc^2, koji se nalazi sa leve strane ove jednačine, se u tom smislu naziva relativistička energija. Iako je posmatrani izraz samo nerelativistička aproksimacija, na osnovu njega možemo da zaključimo da je izraz za ukupnu energiju baš oblika (7.5).

Kako bi izgledao zakon održanja energije u ovom slučaju? On bi morao da bude definisan polazeći upravo od izraza za energiju (7.5) a za male brzine kretanja bi rezultat njegove primene morao da se svodi na rezultat do koga se dolazi u nerelativističkom slučaju . Proverimo ove pretposavke na primeru elastičnog sudara dva tela masa m i M koja se kreću duž x ose brzinama v i V pre sudara a v' i V' nakon sudara. Zakon održanja (relativističke) energije glasi

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{M}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}+\frac{M}{\sqrt{1-V'^2/c^2}}$$

koji za male brzine postaje

$$mc^2+\frac{1}{2}mv^2+Mc^2+\frac{1}{2}MV^2 = mc^2+\frac{1}{2}mv'^2+Mc^2+\frac{1}{2}MV'^2,$$

koji se, nakon potiranja sabiraka koji sadrže prozivode istih masa sa c^2, svodi na zakon održanja energije u nerelativističkom tretmanu elastičnog sudara.

Drugi pristup se svodi na odredjivanje rada potrebnog da se čestica pomeri sa jednog mesta na drugo. Naime, rad koji izvrši sila F, usmerena duž x ose, pri pomeranju čestice od tačke x_1 do tačke x_2 je

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx. \tag{7.7}$$

Da bi rešili ovaj integral, prvo treba da odredimo izvod relativističkog impulsa po vremenu

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m(dv/dt)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

Zamenjujući ovaj izraza u prethodni integral, uz $dx = vdt$, on postaje integral po vremenu, a nakon srdjivanja integral po brzini

$$A = \int_0^t \frac{m(dv/dt)vdt}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m\int_0^v \frac{v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}dv,$$

gde je uzeto da je čestica, pod dejstvom sile F ubrzana iz stanja mirovanja do neke brzine v. Rešavanjem ovog integrala se za rad dobija

$$A = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} - mc^2. \tag{7.8}$$

Rad koji je izvršila posmatrana sila je jednak (relativističkoj) kinetičkoj energiji E_{krel}

$$E_{krel} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2. \tag{7.9}$$

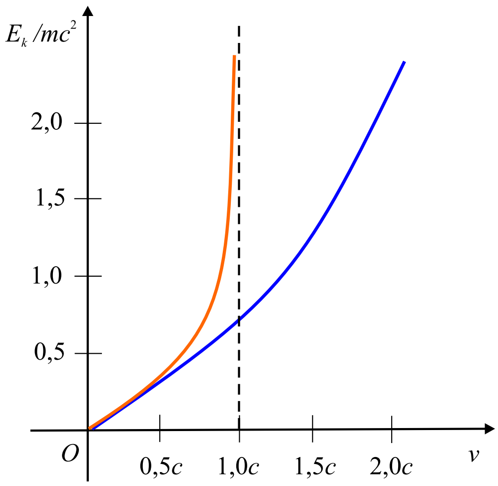
Na slici (7.2) su uporedjene relativistički i nereletavistički izraz za kinetičku energiju. U relativističkom slučaju, čestica nikad ne može da prevazidje brzinu svetlosti. Krive se poklapaju za brzine za koje važi $v << c$.

Konstantan sabirak u jednačini (7.9) (nezavisan od brzine čestice) se naziva **energija mirovanja** čestice i obično označava sa E_0. Sabirak, oblika γmc^2, koji zavisi od brzine čestice, je u skladu sa tim, zbir kinetičke energije i energije mirovanja pa se usled toga zove **ukupna energija** E

$$E = E_{krel} + E_0 = \gamma mc^2, \tag{7.10}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7.11}$$

To je čuvena Ajnštajnova jednačina koja dovodi u vezu masu i energiju. Ona pokazuje da je masa oblik energije i ukazuje na to da maloj masi odgovara velika količina energije, činjenica veoma bitna za nuklearnu fiziku i fiziku elementarnih čestica.



Slika 7.2: Grafičko poredjenje relativističke i nerelativističke kinetičke energije u funkciji brzine čestice.

U procesima koji se dešavaju sa elementarnim česticama, obično nas ne interesuju njihova brzina već impuls i energija, pa je zgodno izvesti relaciju koja ih povezuje. Do nje se može doći ako se podje od relacija $E = \gamma mc^2$ i $p = \gamma mv$. Kvadriranje ovih jednačina i eleminacija brzine dovodi do relacije

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{7.12}$$

Kada je čestica u stanju mirovanja, važi da je $p = 0$, pa je $E = E_0 = mc^2$. Za čestice pak, čija je masa (mirovanja) jednaka nuli, jednačina (7.12) daje

$$E = pc. \tag{7.13}$$

Ova jednačina predstavlja izraz koji povezuje impuls i ukupnu energiju fotona (koji se u vakuumu kreće brzinom c).

Primetimo takodje da je masa čestice m, koja se pojavljuje u prethodnim izrazima, nezavisna od njenog kretanja i mora da ima istu vrednost u svim inercijalnim sistemima reference. Iz tog razloga se, masa m naziva **invarijantna masa**. Sa druge strane, kako ukupna energija i impuls zavise od brzine, zavisiće znači od toga iz kog sistema reference se mere. Kako je medjutim m invarijantna veličina može se zaključiti da će i izraz $E^2 - p^2c^2$ biti invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije.

Ukoliko imamo posla sa subatomskim česticama pogodno je njihovu energiju izražavati u elektron voltima eV. Naime, ukoliko želimo da izračunamo energiju mirovanja elektrona $m_e c^2$dobićemo

$$m_e c^2 = (9,109 \times 10^{-31} kg)(2,9979 \times 10^8 m/s) = 8,187 \times 10^{-14} J$$

što predstavlja malu vrednost. Iskoristimo li činjenicu da jedan elektron volt (eV) predstavlja energiju koju dobije čestica sa naelektrisanjem jednakim naelektrisanju elektrona $e = 1,602 \times 10^{-19} C$, pod dejstvom razlike potencijala (napona) od 1V, konverzioni faktor je

$$1eV = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J},$$

pa se za energiju mirovanja elektrona dobija

$$m_e c^2 = \frac{8,187 \times 10^{-14}}{1,602 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 0,511 \text{ eV}.$$

P r i m e r X. Elektroni se u katodnoj cevi televizijskog aparata kreću brzinama od oko $v = 0,25c$. Odrediti njihovu ukupnu i kinetičku energiju u eV.

R e š e nj e X.

$$E = mc^2$$

Malo mase može da proizvede veliku energiju. U fisionim nuklearnim centralama uranijum U se cepa na dva lakša jezgra koja u zbiru imaju masu manju od polazne, taj deo prelazi u energiju.

Na Suncu se dešava proces fuzije u kome se jezgra vodonika spajaju u jezgra helijuma pri čemu je masa produkata manja od mase polaznih jezgara. Razlika u masama se oslobadja kao energija koja nakon toga do Zemlje dolazi u vidu elektromagnetnih talasa.

7.3 4-vektor impulsa

Izraz koji povezuje relativističku energiju i impuls može da se napiše u obliku

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

koji je očigledno invarijantan. Uporedi li se ovaj izraz sa izrazom koji predstavlja kvadrat intervala u prostoru Minkovskog i ako se ima u vidu pravilo za skalarno množenje 4-vektora u ovom prostoru, on zapravo predstavlja kvadrat intenziteta sledećeg 4-vektora

$$P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right). \tag{7.14}$$

Ovaj vektor predstavlja 4-vektor impulsa. Primetimo da i za relativističku energiju koja se, podeljenja sa c, pojavljuje kao vremenska komponenta ovog vektora, i za relativistički impuls $\vec{p}$ koji predstavlja prostorne komponente 4-vektora impulsa, važe zakoni održanja. U tom smislu se može reći da postoji zakon održanja četvoroimpulsa, odnosno da se u procesima u izolovanim sistemima održava ukupni 4-vektor impulsa sistema.

7.4 Transformacija impulsa i energije

U teoriji relativnosti prostor i vreme nisu nezavisne veličine. Iz Lorencovih transformacija u kojima su povezani, i invarijantnosti intervala, sledi njihova ravnopravnost, odnosno činjenica da obrazuju jedinstveno prostor-vreme. Kao što je ranije pokazano, zakon održanja impulsa je posledica homogenosti prostora dok je zakon održanja energija posledica homogenosti vremena. U tom smislu, pri prelasku sa jednog inercijalnog sistema reference na drugi, izrazi za impuls i energiju treba da se transformišu Lorencovim transformacijama analogno prostornim koordinatama i vremenu. Odgovarajuće formule za transformaciju, u skladu sa relacijom (6.43), glase

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{u}{c^2}E}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \tag{7.15}$$

7.5 Ekvivalencija mase i energije

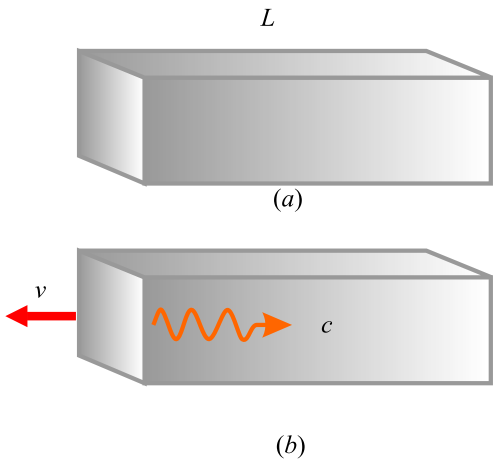
Da bi se razumela ekvivalencija mase i energije, udubimo se u Ajnštajnov misaoni eksperiment kojim je on u stvari opravdao relaciju $E = mc^2$. Zamislimo izolovanu kutiju mase M i dužine$L$ u stanju mirovanja. Pretpostavimo da je sa leve strane kutije emitovan svetlosni puls. Ovaj puls, energije E ima impuls $p = E/c$. Kako važi zakon održanja impulsa, kutija će se pokrenuti na levo brzinom v. Ako pretpostavimo da je kutija veoma masivna, ova brzina će biti mnogo manja od brzine svetlosti, a zakon održanja impulsa daje $Mv = E/c$, odakle je

$$v = \frac{E}{Mc}.$$

Vreme koje je potrebno pulsu da stigne do drugog zida kutije je približno $\Delta t = L/c$. Za to vreme kutija će, krećući se brzinom v, preći malo rastojanje Δx, tako da važi

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{EL}{Mc^2}.$$

Nakon vremena Δt svetlost će pogoditi desni zid kutije i predaće mu odred-



Slika 7.3: (a) Kutija dužine L u stanju mirovanja. (b) Kada se sa leve strane zida emituje svetlosni puls na desno, kutija uzmakne na levu stranu dok puls ne pogodi desni zid.

jeni impuls koji će zaustaviti kutiju. Kako je medjutim reč o izolovanom sistemu, njegov centar masa ne sme da promeni svoj položaj. Ajnštajn je ovu zbunjujuću situaciju razrešio tako što je pretpostavio da svetlost, sem energije i impulsa, ima i masu. Ukoliko sa M_f označimo masu svetlosnog pulsa, iz uslova da centar mase sistema (kutija i svetlosni puls) ne sme da se pomeri, mora da važi

$$M_f L = M \Delta x.$$

Odavde je masa svetlosti

$$M_f = \frac{M\Delta x}{L} = \frac{M}{L}\frac{EL}{Mc^2} = \frac{E}{c^2}$$

odnosno za svetlost važi relacija

$$E = M_f c^2.$$

Ajnštajn interpretacija ovog rezultata predstavlja jednu suštinsku novost za fiziku a to je da, ukoliko telo daje energiju E u vidu zračenja, njegova masa se umanjuje za iznos E/c^2!

Iako je relacija $E = mc^2$ izvedena za svetlosnu energiju, ekvivalentnost na koju ona ukazuje je univerzalna. Jednačina (7.10), koja predstavlja ukupnu energiju čestice, upućuje na to da čak i kada čestica miruje ($\gamma = 1$) ona još uvek poseduje ogromnu energiju, jer poseduje masu. Verovatno najočigledniji eksperimentalni dokaz ove činjenice o ekvivalentnosti mase i energije se dogadja u nuklearnim i interakcijama elementarnih čestica gde se oslobadja velika količina energije usled činjenice da su neke od ovakvih reakcija praćene smanjenjem mase. Oslobadjanje ogromnih kolilčina energije prilikom interagovanja elementarnih čestica praćeno smanjenjenjem njihove mase je osnova svih nuklearnih reakcija. U konvencionalnim nuklearnim rektorima, jezgra uranijuma se podvrgavaju *fisiji*, odnosno reakciji u kojoj se stvara nekoliko lakših fragmenata koji imaju nezanemarljivu kinetičku energiju. Zbir masa produkata raspada uranijuma je manji od mase početnog jezgra za iznos Δm. Energija $E = \Delta mc^2$, koja prema Ajnštajnovoj relaciji odgovara ovoj razlici masa, je tačno jednaka ukupnoj kinetičkoj energiji fragmenata reakcije. Ta kinetička energija se koristi za zagrevanje vode u nuklearnim reaktorima i njeno prevodjenje u paru koja se koristi za generisanje električne energije.

U nuklearnim rekacijama koje nose naziv *fuzija*, dva atomska jezgra se spajaju u jedno, masivnije, jezgro. Fusiona reakcija u kojoj dva deuterijuma formiraju jezgro helijuma su od najveće važnosti u današnjim istraživanjima i pokušajima da se razviju reaktori u kojima će se odvijati kontrolisana fuzija. I ovom prilikom postoji razlika u masama produkta reakcije i početnih jezgara. Razlika u masi je $\Delta m = 4,25\times10^{-29}$ kg. Energija koja se oslobodi u jednoj fuzionoj reakciji je, prema tome, $E = \Delta mc^2 = 3,83 \times 10^{-12}$ J $= 23,9$ MeV. Da bi bolje shvatili o koliko velikoj energiji je reč, napomenimo da, ukoliko bi se samo 1 gram deuterijuma fuzionisao u helijum, energija koja bi se oslobodila iznosi oko 10^{12} J.

Ekvivalentnost mase i energije takodje ukazuje i na to da su zakoni održanja energije i mase zapravo jedan isti zakon.

7.6 Energija veze

Energija veze kao pojam postoji na raznim nivoima strukture materije. Tako na primer, energija veze atoma u molekulu predstavlja minimalnu energiju koju treba uložiti da bi se dati molekul razbio na sastavne atome. Ta energija je zapravo jednaka energiji koja se oslobadja prilikom formiranja molekula od atoma. Jezgra atoma takodje imaju odgovarajuće energije veze. Ovaj pojam ćemo objasniti na primeru najjednostavnijeg jezgra koje se sastoji od više od jednog nukleona. To je deuteron, jezgro deuterijuma, izotopa vodonika, koji je sastavljen od jednog protona i jednog neutrona. Ovo jezgro ima masu od $2,013553u$ a relativno lako je videti da njegova masa nije jednaka zbiru masa protona i neutrona. Naime, kako je masa protona $m_p = 1,007276u$, a masa neutrona $m_p = 1,008665u$, njihov zbir je

$$m_p + m_n = 2,015941u,$$

što je veća vrednost od mase deuterona. Razlika u masi je

$$\Delta m = 0,002388u = 3,96 \times 10^{-30} \text{ kg}.$$

Na osnovu relacije $E = \Delta mc^2$, za energiju veze se dobija

$$E = \Delta mc^2 = (3,96\times10^{-30} \text{ kg})(3,00\times10^8 \text{ m/s})^2 = 3,56\times10^{-18} \text{ J} = 2,23 \text{ MeV}.$$

Ovaj rezultat znači da je minimalna energija koja je potrebna da se uloži za razbijanje deuterona jednaka 2,23 MeV.

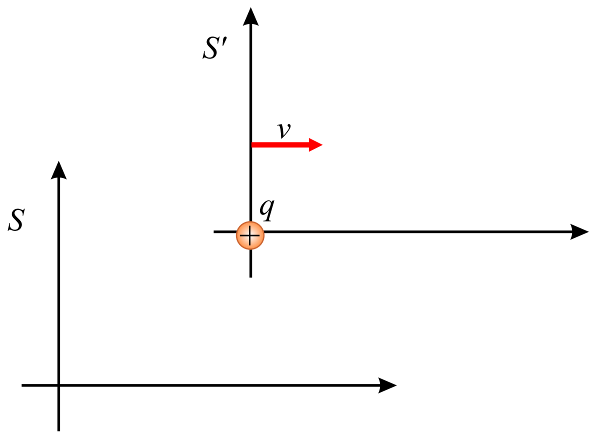
7.7 Relativnost i elektromagnetizam

Posmatrajmo dva inercijalna sistema reference S i S' u relativnom kretanju (sistem S' se kreće u odnosu na S brzinom v u pozitivnom smeru x ose) i pretpostavimo da je pozitivno naelektrisanje q u stanju mirovanja u odnosu na sistem S' (slika 7.4). U odnosu na posmatrača iz tog sistema reference ovo naelektrisanje stvara oko sebe električno polje. Medjutim, za posmatrača iz sistema S, naelektrisanje se nalazi u stanju kretanja pa će oko sebe, osim električnog da stvara i magnetno polje.[7] Ovaj primer nam ukazuje na činjenicu da električno i magnetno polje izgledaju različito u zavisnosti od toga iz kog sistema reference ih posmatramo odnosno merimo.

Posmatrano iz referentnog sistema S pozitivno probno naelektrisanje q se kreće paralelno sa provodnom žicom, brzinom $\vec{v}$, u odnosu na provodnik. Žica je elektroneutralna, a slobodni elektroni u njoj neka se kreću takodje brzinom v u istom pravcu i smeru. Struja teče sa desna na levo i stvara oko provodnika magentno polje indukcije $\vec{B}$ koje je tangenta na kružnice oko provodnika. Vektor magnente indukcije, u delu iznad provodnika u kome se nalazi probno naelektrisanje, je vektor koji usmeren ka ravni crteža. Iz tog razloga, Lorencova sila $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ je usmerena tako da udaljava nalektrisanje od provodnika. Posmatrano iz ovog sistema reference, obzirom da je provodnik električno neutralan, na ovo telo ne deluje električna sila.

Da vidimo kako izgleda ista situacija posmatrana iz sistema S' u kome probno naelektrisanje q miruje (slika 7.5). Gledano iz njega, elektroni su u

[7] Drugi rečima, posmatrač koji se nalazi u sistemu S, može da izmeri oba polja.

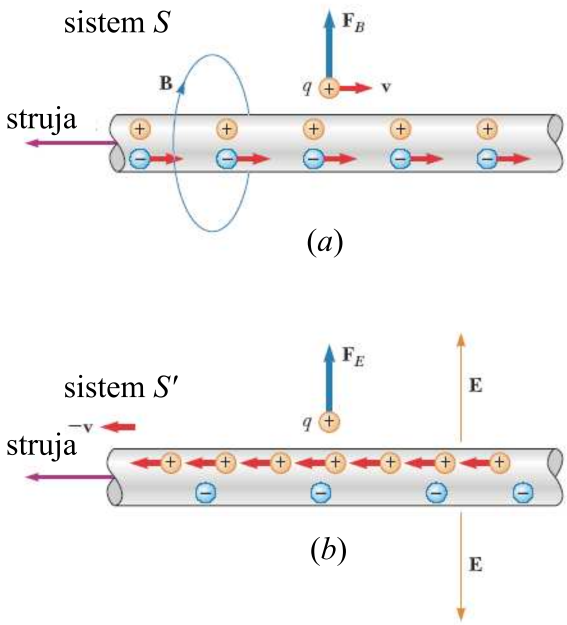


Slika 7.4: U sistemu S, pozitivno naelektrisanje q se kreće na desno brzinom v, i stvara oko sebe i magnento polje. U njegovom sopstvenom sistemu reference S ono oko sebe stvara samo električno polje.

stanju mirovanja, pozitivna naelektrisanja koja se nalaze u provodniku se kreću sa desna na levo i kroz njega protiče struja. Pošto se u ovom sistemu reference probno naelektrisanje ne kreće, gledano iz njega Lorencova sila je jednaka nuli. Medjutim, poštos sila koja deluje na probno naelektrisanje postoji u sistemu S ona mora da postoji i u sopstvenom sistemu reference probnog naelektrisanja q. Kakva je priroda ove sile?

Odgvoro na ovo pitanje daje specijalna teorija relativnosti. Kada se gleda iz sistema S, pozitivna naelektrisanja provodne žice su u stanju mirovanja a elelektroni se kreću na desno brzinom v. Usled efekta kontrakcije dužine, elektroni se nalaze na manjoj medjusobnoj udaljenosti od one na kojoj bi bili kada se ne bi kretali (odnosno od njihove sopstvene udaljenosti-udaljenosti merene u sopstvenom sistemu reference elektrona). Situacija izgleda potpuno drugačije kada se posmatra iz sistema S'. U ovom sistemu, usled istog efekta, pozitivna naelektrisanja su bliža jedna drugima, a elektroni koji se nalaze u stanju mirovanja, se nalaze na rastojanjima koja su veća od onih izmerenih iz sistema S. Usled toga, posmatrano iz sistema reference S, u žici se javlja višak pozitivnih naelektrisanja po jedinici dužine. Vižak pozitivnih naelektrisanja stavara elektriño polje, koje je usmereno tako da odbija probno naleketrisanje od žice.

Na osnovu ove analize možemo da zaključimo da gledano iz sistema S provodnik sa strujom oko sebe stvara magnetno polje koje Lorencovom silom deluje tako da odbija probno naelektrisanje od provodnika. Posmatrano iz



Slika 7.5: (a) U sistemu S, pozitivno naelektrisanje q se kreće na desno brzinom v, a provodnik kroz koji protiče struja je stacionaran. Magnetno polje provodnika deluje na naelektrisanje q Lorencovom silom usmerenom "naviše". (b) Posmatrano iz sistema S', provodnik se kreće nalevo brzinom $-v$ dok je naelektrisanje q stacionarno. Provodnik stvara oko sebe električno polje $\vec{E}$, koje deluje na naelektrisanje q silom koja ima smer od provodnika.

sopstvenog sistema reference probnog nelektrisanja ovo delovanje je izazvano postojanjem električnog polja za koje smo pokazali da je posledica efekta kontrakcije dužine.

7.8 Granica izmedju Njutnove i relativističke dinamike

Iz napred izloženog je jasno da Ajnštajnova teorija relativnosti nije teorija koja treba da zameni Njutnovu, već je teorija koja je sadrži kao granični slučaj za tela koja se kreću relativno sporo. Interesatno je zapitati se da li je moguće formulisati kriterijum koji bi nam ukazivao na to kada možemo da primenjujemo Njutnovu a kada moramo Ajnštajnovu mehaniku.

Pretpostavimo da instrument kojim vršimo merenja ima tačnost od n sigurnih cifara. U tom slučaju, ako je relativna greška prilikom merenja manja od 10^{-n}, obzirom na tačnos instrumenta kojim merimo, ne možemo je registrovati. Pokušajmo da procenimo pri kolikoj brzini kretanja neće moći d se registruje razlika izmedju na primer relativističkog p i klasičnog impulsa p_{cl}.

Relativna greška pri merenju impulsa je

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{p - p_{cl}}{p} = 1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{7.16}$$

Da bi bili u oblasti brzina u kojima možemo da primenjujemo nerelativističku fiziku, ova greška (u pravljenju razlike izmedju relativističkog i nerelativističkog impulsa) mora biti manja od tačnosti instrumenta, odnosno od 10^{-n}, to jest mora da važi

$$1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} < 10^{-n}, \tag{7.17}$$

odnosno

$$1 - 10^{-n} < \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{7.18}$$

Kvadriramo li ovu nejednakost (što je moguće jer je jedinica veća od 10^{-n}, dobijamo

$$1 - 2 \cdot 10^{-n} + 10^{-2n} < 1 - \frac{u^2}{c^2}, \tag{7.19}$$

ili

$$u < c\sqrt{2 \cdot 10^{-n} - 10^{-2n}}. \tag{7.20}$$

Uzmemo li u obzir da je $10^{-2n} << 10^{-n}$, konačno se dobija

$$u < c\sqrt{2 \cdot 10^{-n}}. \tag{7.21}$$

Neka se na primer merenje vrši sa tačnošću do šest značajnih cifara ($n = 6$). Tada je $u < c\sqrt{2 \cdot 10^{-6}} = 423 km/s$.[8] Na taj način, pri brzinama kretanja koje ne prelaze četiri stotine kilometara u sekundi, nerelativistički impuls se razlikuje od relativističkog za manje od 10^{-6}, to jest za manje od jednog desetohiljaditog dela procenta.

U realnim uslovima kretanja velikih tela, njihova brzina je znatno manja od navedene granične, čak i kosmičke rakete se, kao što je već napomenuto, kreću brzinom od oko 10 km/s, odnosno imaju oko 40 puta manju brzinu. Sa druge strane, i merenja u tehnici se obično ne izvode sa navedenom tačnošću. Iz svega navedenog je jasno da će u ovim uslovima opisivanje kretanja primenom Njutnovih zakona dati idealno tačne rezultate.

U svetu mikročestica se medjutim često sreću velike brzine koje su bliske brzini svetlosti u vakuumu. U tim slučajevima se dobri rezultati dobijaju jedino primenom teorije relativnosti. Štaviše, upravo je u analizi kretanja brzih mikročestica eksperimentalno dokazano važenje relativističkog izraza za impuls.

Klasifikacija tipova kretanja čestica obzirom na njihove brzine izgleda ovako:

- *Njtunovska oblast.* Brzina kretanja tela je toliko mala da instrumenti kojima vršimo merenja ne mogu da registruju relativističke efekte usporavanja vremena, skraćivanja dužina, ... U ovoj oblasti je dozvoljena primena zakona njutnovske mehanike, odnosno ona daje jednake rezultate kao i relativistička ali uz daleko jednostavniji račun nego što bi bio onaj koji bi trebalo sprovesti u okviru Ajnštajnove mehanike.

- *Relativistička oblast.* Brzina kretanja tela je dovoljno velika tako da su relativistički efekti merljivi. U ovoj oblasti dobre rezultate daje jedino primena relativističke mehanike.

- *Ultrarelativistička oblast.* Brzina tela je skoro jednaka brzini svetlosti u vakuumu. Preciznije rečeno, brzina tela je toliko bliska brzini svetlosti da je to nemoguće izmeriti instrumentima, odnosno njihova osetljivost je manja od te razlike. I u ovoj oblasti je naravno neophodno primenjivati relativističku mehaniku.

[8] Navedena brzina čini oko 1% od brzine svetlosti.

Ukoliko za pretpostavljenu tačnost instrumenata kojima vršimo merenja uzmemo onu koja je već pretpostavljena, tj. 10^{-6}, klasična oblast brzina bi bila oblast brzina manjih od 400km/s, ultrarelativistička oblast je oblast brzina koje se razlikuju od brzine svetlosti manje od 300 km, a preostali dijapazon brzina je relativistička oblast.

7.8.1 Kretanje čestice u polju konstantne sile

Kao ilustraciju navedene analize razmotrimo kretanje (ubrzavanje) čestice konstantom silom. Osnovni zakon dinamike ne menja formu

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{7.22}$$

Razdvajanjem promenljivih i integracijom od t_1 do t_2, imajući u vidu da je sila konstantna dobija se

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \vec{F}(t_2 - t_1).$$

Ukoliko se za početni trenutak uzme da je nulti i da je čestica krenula iz stanja mirovanja, uz $t_2 = t$, prethodni izraz u skalranoj formi postaje

$$p = Ft, \tag{7.23}$$

iz koga se vidi da, kao i u nerelativističkom slučaju, kada na telo deluje konstantna sila, impuls tela raste sa vremenom. Postavlja se logično pitanje, a to je da li je identična situacija i sa brzinom? Da bi videli kako se ona ponaša sa vremenom, ubacimo u prethodni izraza relativistički izraza za impuls i rešimo ga po brzini

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Ft,$$

$$v(t) = \frac{a_{cl}t}{\sqrt{1 + \frac{a_{cl}^2 t^2}{c^2}}}, \quad a_{cl} = \frac{F}{m}$$

(sa a_{cl} je označeno klasično ubrzanje). Za dalju analizu je pogodno da se ovaj izraz napiše kao

$$v(t) = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a_{cl}^2 t^2}}}. \tag{7.24}$$

Iz ovog izraza se vidi da je uvek $v(t) < c$, a pri $t \to \infty$ brzina tela postaje sve bliža brzini svetlosti. Za slučaj ne mnogo velikih vremena $t << c/a_{cl}$, se iz ovog izraza dobija

$$v(t) \approx a_{cl}t,$$

odnosno izraz koji u nerelativističkoj mehanici opisuje promenu brzine kada pri konstatnom ubrzanju.

Navedimo neke kvantitativne procene. Posmatrajmo raketu koja se kreće sa ubrzanjem (klasičnim) $a_{cl} = g = 9,8 m/s^2$ (pri kretanju takvim ubrzanjem kosmonauti osećaju gravitaciju na koju su navikli na Zemlji). Prema klasičnom zakonu kretanja raketa bi dostila brzinu svetlosti za vreme

$$t_{cl} = \frac{c}{a_{cl}} = \frac{3 \cdot 10^8}{9,8} = 3,06 \cdot 10^7 s,$$

odnosno, otprilike za jednu godinu $(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s = 3,1536 \cdot 10^7 s)$. Medjutim, nakon jedne godine kretanja ovim ubrzanjem, brzina rakete će biti

$$v(t_{cl}) = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a_{cl}^2 t_{cl}^2}}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = 0,707c.$$

Nakon još jedne godine brzina bi bila $v(2t_{cl}) = \frac{c}{\sqrt{1+0,25}} = 0,894c$, kroz 5 godina $v(5t_{cl}) = \frac{c}{\sqrt{1+0,04}} = 0,980c$, dok je kroz 10 godina $v(10t_{cl}) = \frac{c}{\sqrt{1+0,01}} = 0,995c$. Koliko god dugo da se kreće jednakim ubrzanjem, raketa nikad neće dostići brzinu svetlosti.