

Glava 4

Talasi

Prve predstave o talasnom kretanju se obično vezuju za formiranje talasa izazvano bacanjem kamena u vodu. Tom prilikom se lako uočava da se poremećaj, koji je izazvao kamen, širi cirkularno od mesta na koje je pao. Moglo bi da se zaključi da se pri ovakvom kretanju pomeraju delovi vode od mesta pada kamena, međutim pažljivom analizom pojave se uočava da se to ne dešava. Tako ako na primer po vodi pliva lišće drveća, pažljivim posmatranjem može da se uoči da listovi ostaju na mestu na kome su i bili, i da se samo podižu gore-dole, pri čemu se taj tip kretanja širi simetrično od centra u kome je nastao. Ovo nas navodi na zaključak da se, iako se *talas* koji je nastao na mestu pada kamena kreće od njega radijalno, to ne izaziva pomeranje vodenih masa u smeru njegovog prostiranja.



Slika 4.1: Formiranje više talasa na vodi.

U prirodi možemo da uočimo jako puno procesa koji se mogu svrstati u talase, ali sve ih možemo podeliti u dve vrste *mehaničke* i *elektromagnetne*. U mehaničke spadaju: akustički, odnosno zvučni talasi, talasi na vodi, ...

U ova dva slučaja se prilikom formiranja talasa dešavaju pomeranja delića materijalne sredine (medijuma) oko njihovih ravnotežnih položaja. Kada je reč pak o elektromagnetnim talasima, njima za nastanak i prostiranje nije potrebna materijalna sredina, odnosno medijum.¹ Primeri elektromagnetnih talasa su: vidljiva svetlost, radio talasi, x-zraci, ... Bez detaljnog udublivanja u teoriju elektromagnetnih talasa, recimo samo da je u njihovom slučaju reč o oscilovanju električnog i magnetnog polja koje se prenosi kroz prostor (pri tom su promene ova dva polja u fazi, odnosno ona istovremeno imaju jednake elongacije), dakle nije mu neophodan medijum-materijalna sredina.

Kada je reč o mehaničkim talasima, kao što je već napomenuto, reč je o prostiranju nečim izazvanog poremećaja kroz materijalnu sredinu.² Drugim rečima, da bi postojao mehanički talas, potrebno je da postoje

- izvor poremećaja,
- sredina u kojoj može da se izvede poremećaj,
- određena fizička veza između čestica sredine kojom su povezani njeni susedni delovi i putem koje utiču jedni na druge.

Kao što će se pokazati talasi u principu prenose energiju kroz sredinu.³

4.1 Osnovne veličine potrebne za opisivanje talasnog kretanja

Zamislimo da se nalazimo na splavu koji pluta po velikom jezeru. Mogli bi da uočimo da se stalno podižemo i spuštamo, u ritmu kretanja talasa jezerom.

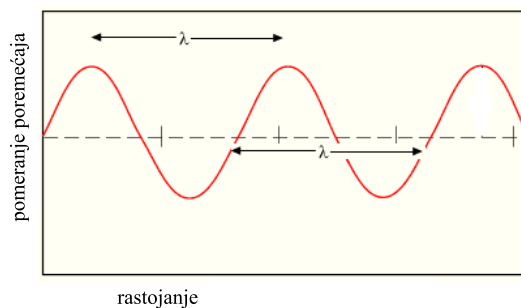
¹To je stanovište današnje nauke, međutim, veliki uspeh koji je postignut u proučavanju mehaničkih talasa je doveo do toga da se pokuša da se na analogan način predstavi nastanak i prostiranje elektromagnetnih talasa. U tu svrhu je uvedena hipotetička, veoma retka i veoma elastična sredina pod nazivom etar koja je trebala da postoji samo radi toga da bi se kroz nju prostirali elektromagnetni talasi. Eksperimenti su međutim pokazali da ona nije neophodna za prostiranje elektromagnetnih talasa. O hipotezi postojanja etra će biti više reči u glavi posvećenoj teoriji relativnosti.

²Na primer, "vodeni" talas ne postoji bez vode, talas na žici ne postoji ako nema žice u kojoj bi se izazvao poremećaj, zvučni talas ne bi mogao da se prostire kroz vakuum, odnosno kroz prostor u kome nema molekula vazduha, ...

³Količina energije koja se prenosi kroz medijum i mehanizam putem koga se prenosi energija se razlikuju od tipa do tipa talasa a zavise i od uslova pri kojima nastaje i prostire se talas. Na primer, snaga (a samim tim i energija) talasa koji nastaju u vreme oluje na okeanu je mnogo veća od snage zvučnog talasa generisanog glasom jednog čoveka.

4.1. OSNOVNE VELIČINE POTREBNE ZA OPISIVANJE TALASNOG KRETANJA 167

Takodje bi bilo kako uočiti kretanje talasa po površini jezera, odnosno njihovo približavanje splavu na kome se nalazimo. Tačka u kojoj je pomeranje vode u odnosu na njen normalna nivo maksimalno se naziva **breg** talasa. Jasno je da će, u zavisnosti od uslova nastanka, talasi na vodi imati različitu udaljenost susednih bregova. U skladu sa time je potrebno uvesti fizičku veličinu koja bi opisala ovu činjenicu. Ona se naziva *talasna dužina* i, prema izloženoj ideji, predstavlja udaljenost dva **susedna** brega talasa. Obično se označava grčkim slovom λ . Tačnije, kada je reč o mehaničkim talasima,⁴ talasna dužina je rastojanje izmedju bilo koje dva dela sredine koji su u identičnom stanju oscilovanja.



Slika 4.2: Talasna dužina.

Ako bi izmerili vreme izmedju nailaska dva susedna brega talasa, dobili bi veličinu koja se naziva *period* talasa i označava sa T . Period (mehaničkog) talasa bi, u stvari, bilo vreme koje treba talasu da dva susedna delića sredine dovede u isto stanje oscilovanja.

Ista informacija o talasu se često zadaje veličinom, koja je inverzna periodu talasa, koja se naziva *frekvencijom* i obično označava grčkim slovom ν . Frekvencija talasa je, prema tome, broj bregova talasa koji prodju kroz jednu tačku u prostoru, u jedinici vremena.

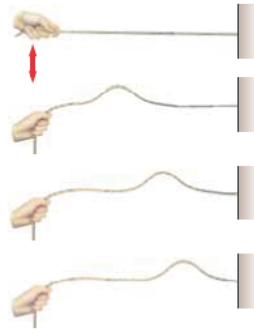
Maksimalno pomeranje delića sredine, od njihovog ravnotežnog položaja se naziva *amplituda* talasa. Za talas na vodi to je očigledno maksimalna visina na koju se podižu delići vode, merena od normalnog nivoa vode kada nema talasa.

⁴Ograničenje u ovoj definiciji je uvedeno zbog elektromagnetnih talasa kojima za prostriranje, kao što je navedeno, nije potrebna materijalna sredina. U slučaju ovih talasa, talasna dužina je minimalno rastojanje izmedju dve identične tačke na talasu.

Talasi se prostiru odredjenom brzinom, koja zavisi od osobina sredine u kojoj je nastao i kroz koju se prostire poremećaj koji nazivamo talasom. Na primer, zvučni talas koji se prostire kroz vazduh na sobnoj temperaturi, se kreće brzinom oko 343 m/s, dok se kroz čvrsta tela kreće većom brzinom.

4.2 Pravac poremećaja delova sredine

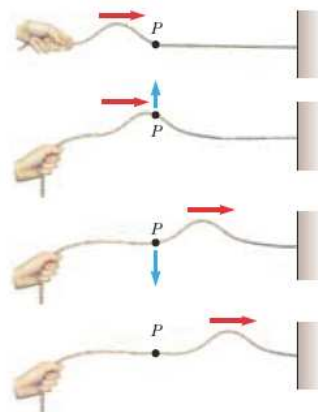
Jedan od načina za demonstriranje talasnog kretanja je formiranje talasa na kanapu čiji je jedan kraj pričvršćen a drugi držimo u ruci i pomerimo ga naglo iz ravnotežnog položaja i vratimo u njega. Na taj način je na kanapu nastao talasni puls koji se odredjenom brzinom kreće duž njega. Takav tip poremeća je progresivni talas (slika 4.3).



Slika 4.3: Nastanak talasnog pulsa na zategnutom kanapu.

Kanap je sredina kroz koju se prostire talasni puls. Za razliku od niza pulseva (na koje obično mislimo kada zamišljamo talas), nema frekvenciju, period i talasnu dužinu. Medjutim, on ima odredjenu amplitudu i brzinu prostiranja. Kao što će kasnije biti pokazano, veličine koje odredjuju brzinu pulsa (i talasa) kod zategnutog kanapa (i žice) su sila zatezanja i linijska gustina (masa po jedinici duv zine). Može da se takodje primeti da se oblik pulsa praktično ne menja pri kretanju duž kanapa.

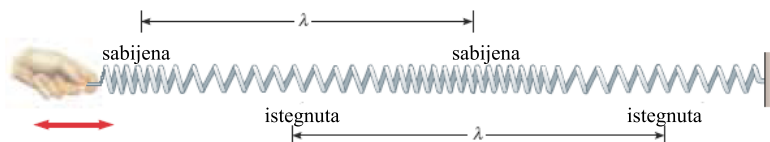
U toku prostiranja pulsa kroz kanap, svaki delić kanapa biva poubdjen na kretanje, čiji je pravac normalan u odnosu na pravac prostiranja pulsa. Slika 4.4 ilustruje ovo tvrdjenje na primeru jedne izabrane tačke na kanapu, označene slovom P . Takodje se može zaključiti da se ni jedan delić kanapa ne kreće u pravcu prostiranja talasa.



Slika 4.4: Kretanje delića kanapa pri prostiranju pulsa duž njega.

Progresivni talas, kod koga se čestice sredine kreću u pravcu normalnom na pravac prostiranja talasa, naziva se *transverzalnim talasom*.⁵

Osim ovakvog tipa talasa postoji i drugi koji nastaje duž zategnute (spiralne) opruge (slika 4.5), u slučaju kada se opruga lagano rasteže i opušta duž njene ose simetrije. Ovakvo kretanje formira oblasti u kojima je opruga više sabijena i mesta na kojima je više istegnuta, pri čemu se ove oblasti, prateći jedna drugu, kreću duž opruge, od mesta na kojem su nastali ka njenom drugom kraju. Važno je primetiti da su, u ovom slučaju, pravac pomeranja delova opruge (u odnosu na njihov ravnotežni položaj) i pravac pomeranja oblasti u kojima je opruga sabijena, paralelni.



Slika 4.5: Talas nastao kada se vrši deformacija zategnute opruge duž pravca njene ose simetrije.

⁵Drugi primer bi bio puls koji se formira na stadionu prilikom naizmeničnog ustajanja navijača. Rezultat je obilazak ovog pulsa oko celog stadiona. Primer nemehaničkog transverzalnog talasa je elektromagnetni talas u kome su vektori električnog i magnetnog polja ortogonalni na pravac prostiranja svetlosti (oni su takodje ortogonalni jedan u odnosu na drugog).

Progresivni talas, u kojem se čestice sredine kreću⁶ paralelno kretanju talasa, naziva se *longitudinalni*⁷ talas.⁸

4.3 Jednodimenzionalni progresivni talas

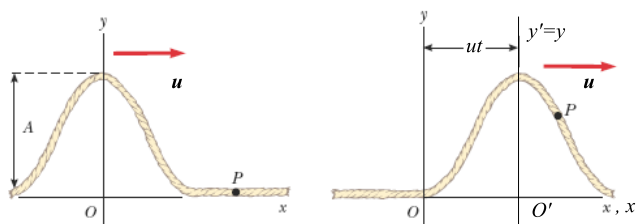
Razmotrimo puls koji se prostire s leva na desno duž zategnute žice, konstantnom brzinom u (slika 4.6). Taj puls se kreće duž x ose dok se pomeranja delića žice dešavaju duž y ose. Na prvom delu slike je predstavljen izgled i pozicija pulsa u $t = 0$. U tom momentu vremena, njegov oblik je neka funkcija veličine x , koju ćemo zapisati u najopštijem obliku $y = f(x)$, pri čemu je sa y označen otklon neke tačke x od njenog ravnotežnog položaja koji je određen sa $y = 0$. Otklon y se obično naziva *talasna funkcija* i, u principu, zavisi i od pozicije tačke na horizontalnoj osi i od momenta vremena u kojem nas zanima, pa se to naglašava zapisom $y = y(x, t)$.

Uočimo sada neku tačku P čija je elongacija u početnom trenutku vre-

⁶Misli se naravno na kretanje čestica izazvano poremećajem usled koga je i nastao talas. Čestice sredine mogu naravno učestvovati i u drugim tipovima kretanja koji nisu od interesa za ovo razmatranje.

⁷Zvučni talas je drugi primer longitudinalnog talasa. Poremećaj u vazduhu izaziva niz oblasti u kojima je naizmenično, pritisak niži, odnosno viši u odnosu na ravnotežnu vrednost pritiska kada nema izvora zvuka. Drugi primer bi bio puls koji nastaje u (idealnom) redu ljudi koji čekaju da kupe kartu kada prvi u tom redu kartu kupi i izadje iz njega a svi ostale se pomere napred za jedno mesto.

⁸Neki talasi u prirodu su kombinacija transverzalnih i longitudinalnih pomeranja čestica sredine. Površinski talas na vodi je dobar primer takvog tipa kretanja. U tom slučaju, kada se po površini duboke vode prostire talas, molekuli vode koji se nalaze na površini se kreću po približno kružnim putanjama. Kao što je dobro poznato, takvo kretanje se može razložiti na transverzalnu i longitudinalnu komponentu. Drugi primer ovako složenog talasa je talas koji nastaje pri zemljotresu. Longitudinalna komponenta ovakvog talasa je brža (kreće se brzinom od 7-8 km/s) blizu površine Zemlje. Ovakvu talasu se naziva "P" talasom (od reči primarni) jer je brži od transverznog i prvi se može registrovati seizmografom. Sporiji, transverzalni talas, se naziva "S" (sekundarni) talasom i on se kreće brzinom od 4 do 5 km/s u blizini Zemljine površine. Registrovanjem vremenskog intervala između dolaska P i S talasa u seizmograf, može da se izračuna rastojanje od njega do mesta nastanka ovih talasa. Na osnovu jednog takvog merenja može da se nacrtati zamišljena sfera, sa centrom u seizmografu, čiji je poluprečnik određen vremenskim intervalom kašnjenja sekundarnih talasa u odnosu na primarne. Mesto nastanka talasa se u tom slučaju nalazi negde na toj sferi (naravno u delu gde se sfera nalazi pod površinom Zemlje. Ukoliko se na pogodan način postave još dva seizmografa, i na osnovu njihovog merenja nacrtaju odgovarajuće sfere, u njihovom preseku se dobija mesto na kome se desio zemljotres.



Slika 4.6: Puls koji se kreće u jednoj dimenziji u trenutku $t = 0$ i u nekom docnijem trenutku t .

mena jednaka nuli (slika 4.6). Kada puls dodje do tačke P , njena y koordinata poraste, dostiže maksimum a onda opadne do nulte vrednosti. Kako je brzina prostiranja pulsa u , puls za vreme t predje rastojanje ut . Ukoliko se oblik pulsa ne menja sa vremenom, on će, u sistemu reference koji ima početak u tački O' , biti zadata istom funkcijom oblika ali sa promenjenom vrednošću koordinate x , koja je sada x' , odnosno $y = f(x')$. U skladu sa Galilejevim transformacijama, veza ovih koordinata je $x' = x - ut$, pa će jednačina koja pokazuje kako se talasna funkcija menja sa vremenom i sa rastojanjem koje je puls prešao biti oblika

$$y(x, t) = f(x - ut). \quad (4.1)$$

Ukoliko se puls prostire sa desna na levo, biće opisan jednačinom

$$y(x, t) = f(x + ut). \quad (4.2)$$

Interesantno je proanalizirati brzinu prostiranja brega pulsa. Neka je breg u početku ($t = 0$) bio na mestu čija je x koordinata x_0 . Kako se puls prostire brzinom u , za vreme dt je prešao rastojanje udt i došao u tačku x zadatu sa $x = x_0 + udt$, pri čemu je puls prešao rastojanje dx , za koje mora da važi $dx = x - x_0 = (x_0 + udt) - x_0 = udt$, odakle je

$$u = \frac{dx}{dt}. \quad (4.3)$$

4.3.1 Puls koji se prostire na desno

Proanalizirajmo jedan instruktivan primer. Neka je talasni puls koji se kreće duž x ose zadat jednačinom

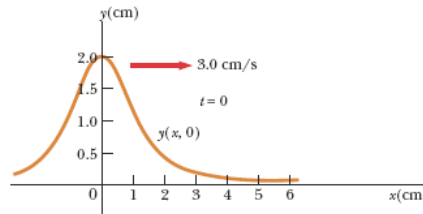
$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}, \quad (4.4)$$

gde je x izraženo u centimetrima a t u sekundama.⁹ Nacrtajmo izgled ovih pulseva u trenucima vremena $t = 0$, $t = 1$ s i $t = 2$ s.

Iz jednačine pulsa se vidi da je njegova brzina brzina pulsa $u = 3$ cm/s, dok mu je amplituda $A = 2$ cm. U trenutku $t = 0$ talasna funkcija je

$$y(x, 0) = \frac{2}{x^2 + 1},$$

a nalaženjem prvog i drugog izvoda se lako vidi da ima maksimum u $x = 0$. Takođe, obzirom da u $x = \pm\infty$ postaje jednaka nuli, jasno je da je x osa je njena horizontalna asimptota. Obzirom na to da je parna ona je i simetrična u odnosu na y osu, a daljom analizom se dolazi do toga da je njen grafik predstavljen na slici 4.7.



Slika 4.7: Talasna funkcija pulsa za $t = 0$.

Talasne funkcije pulsa u druga dva momenta vremena su

$$y(x, 1) = \frac{2}{(x - 3)^2 + 1}, \quad y(x, 2) = \frac{2}{(x - 6)^2 + 1}$$

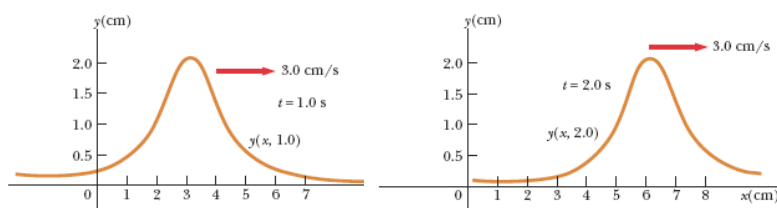
a jedina razlika njihovih grafika u odnosu na onaj za $t = 0$ je u tome što ima se maksimum nalazi u tački $x = 3$ cm, odnosno $x = 6$ cm (slika 4.8).

Na osnovu izvršene analize se vidi da se puls zadat jednačinom (4.4), zaista prostire sa leva na desno, pri čemu mu se oblik ne menja.

4.3.2 Brzina talasa na žici

Razmotrimo prostiranje transverzalnog pulsa po zategnutoj žici. Sila zatezanja žice je, prilikom prostiranja pulsa duž nje, odgovorna za povratak svakog njenog deformisanog delića u ravnotežni položaj, saopštavajući mu

⁹Primitimo da ova funkcija ima oblik $y = f(x - ut)$.

Slika 4.8: Talasna funkcija pulsa za $t = 1$ s i $t = 2$ s.

određeno ubrzanje. U skladu sa II Njutnovim zakonom ubrzanje delića je direktno proporcionalno sili zatezanja. Ukoliko se delić vraća u ravnotežu pod dejstvom većeg ubrzanja (veće sile zatezanja), to će automatski značiti da je i brzina prostiranja pulsa veća. Dakle ona je upravno srazmerna sili zatezanja.

Sa druge strane, brzina pulsa je obrnuto proporcionalna masi i opada kada masa žice po jedinici njene dužine raste. Ovaj zaključak sledi iz činjenice da je masa mera inercije pa je prema tome masivnije deliće teže ubrzati od manje masivnih.

Detaljniji proračun, kao što će kasnije biti pokazano, dovodi do sledećeg izraza za brzinu talasnog pulsa u žici

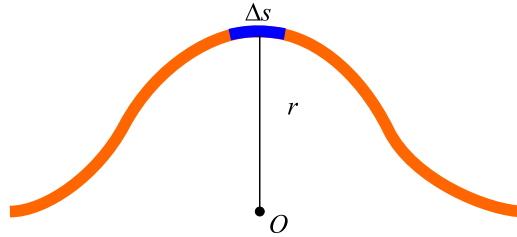
$$u = \sqrt{\frac{F_z}{\mu}}, \quad (4.5)$$

čija je masa po jedinici dužine $\mu = m/l$ i koja je zategnuta silom zatezanja F_z .¹⁰

Kada kažemo da se duž zategnute žice, brzinom u , prostire puls sa leva na desno, time smo automatski rekli da prostiranje pulsa posmatramo iz nekog nepokretnog inercijalnog sistema reference. Pogodno je međjutim preći u sistem reference koji prati kretanje ovog pulsa, koji je takodje inercijalan. Prema Galilejevom principu relativnosti, II Njutnov zakon će u njemu, kao i u nepokretnom sistemu reference, imati potpuno isti oblik. U ovom sistemu reference, dati delić žice koji se u početku nalazio desno od pulsa (odnosno ispred njega), kreće se na levo, podižući se u vis i prateći oblik pulsa a nakon

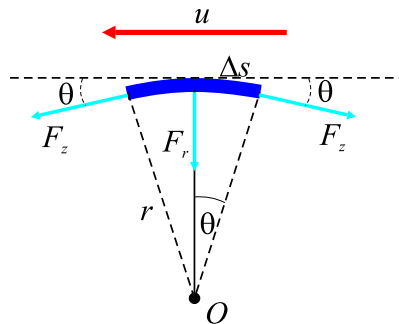
¹⁰Ako se podje od kvalitativne analize koja je pokazala da je brzina pulsa direktno srazmerna sili zatezanja a obrnuto masi po jedinici dužine, dimenzionalnom analizom se može pokazati da je ovo jedini mogući izraz koji povezuje ove dve veličine na taj način.

dostizanja maksimalne visine spušta se na dole. Na slici 4.9 prikazan je jedan takav delić u trenutku kada je dostigao maksimalnu visinu.



Slika 4.9: Delić žice koji je dostigao maksimalnu visinu. Ovaj delić se kreće radijalnim ubrzanjem $a_r = u^2/r$

Delić žice dužine Δs može da se smatra lukom kružnice poluprečnika r . U sistemu reference koji se kreće na desno brzinom u , osenčeni delić se kreće na levo brzinom jednakog intenziteta. Na njega deluje sila zatezanja, kao što je prikazano na slici 4.10. Ova sila deluje sa obe strane na delić žice (luk dužine Δs) i ima dve komponente, horizontalnu i radijalnu.



Slika 4.10: Uvećan prikaz delića na maksimalnoj visini. Ukupna sila koja deluje na njega ima samo radijalnu komponentu jer se tangencijalne poništavaju.

Horizontalne komponente, obzirom da su jednakog intenziteta a suprotno usmerene, se poništavaju, tako da od obe ostaju samo radijalne komponente $F_z \sin \theta$ koje su usmerene ka centru kružnice. Ukupna radijalna sila je $2F_z \sin \theta$. Kako je delić žice veoma mali, mali je i ugao θ , pa se može uzeti

da je približno $\sin \theta \approx \theta$, pa je ukupna radijalna sila

$$\sum F_r = 2F_z \sin \theta \approx 2F_z \theta.$$

Posmatrani delić ima masu $m = \mu \Delta s$, a kako ugao nad kojim je formiran luk dužine Δs , iznosi 2θ , masa luka je

$$m = \mu \Delta s = \mu r(2\theta).$$

Primeni li se II Njutnov zakon na ovaj delić žice, za radijalnu komponentu sile se može pisati

$$\sum F_r = ma_r = \frac{mu^2}{r},$$

odnosno

$$2F_z \theta = \frac{2\mu r \theta u^2}{r}.$$

Kada se ovaj izraz reši po u , dobija se izraz (4.5).¹¹

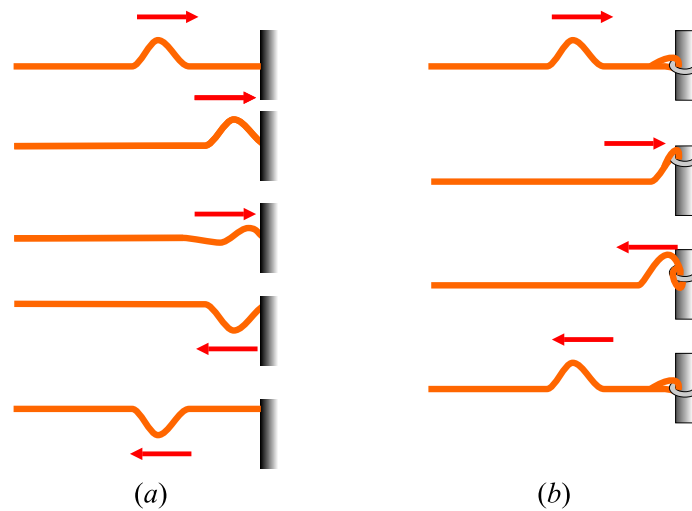
4.3.3 Refleksija i transmisija

U dosadašnjim razmatranjima su analizirani talasni procesi kroz sredinu čije se karakteristike uniformne, odnosno ne menjaju se. Interesantno je razmotriti šta se dešava sa talasom kada sredina nije takva. Posmatrajmo za početak prostiranje pulsa koji se prostire na konopcu čiji je jedan kraj pričvršćen (slika 4.11(a)).

Kada puls dodje do mesta na kome je konopac učvršćen, više ne može da se prostire kroz homogenu sredinu - došao je do njenog kraja. Rezultat je refleksija (odbijanje) pulsa i njegov povratak nazad.

Primetimo da je puls invertovan. Ta inverzija se može objasniti na sledeći način: kada puls stigne do pričvršćenog kraja konopca, on deluje na mesto pričvršćenja silom na gore. Prema III Njutnovom zakonu nosač za koji je pričvršćen konopac deluje na njega silom jednakog intenziteta ali suprotnog smera (na dole).

¹¹Potrebno je uočiti da je ovakvo izvodjenje izraza za brzinu talasa u žici zasnovano na pretpostavki da je visina pulsa mala u poredjenju sa dužinom žice. Na osnovu te pretpostvake je na primer uzeto da je $\sin \theta \approx \theta$. Takodje je prećutno uzimano da je sila zatezanja žice jednaka iako postoji puls, odnosno pretpostavljano je da je sila zatezanja ista u svim tačkama žice. Primetimo takodje, da je izraz dobijen nezavisno od oblika pulsa te je prema tome brzina pulsa ma kog oblika koji se prostire duž žice jednaka $u = \sqrt{F_z/\mu}$.



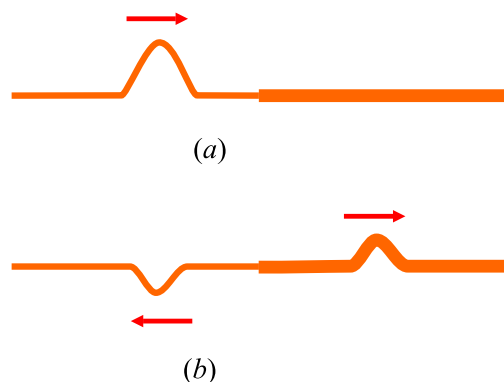
Slika 4.11: (a) Refleksija progresivnog pulsog talasa na zategnutom konopcu sa učvršćenim krajem. Reflektovani puls se invertovao bez promene oblika. (b) Refleksija progresivnog pulsa na zategnutom konopcu sa nepričvršćenim krajem. Reflektovani puls se nije invertovao i nije promenio oblik.

Ukoliko se pak desi slučaj da puls stigne do kraja konopca koji može da se kreće vertikalno (slika 4.11(b)) jer je recimo zavezan za neku alku zanemarljive mase koja može da se pomera duž šipke na koju je nataknuta. Sila zatezanja će povući na gore konopac na visinu pulsa a zatim će ga na dole usmerena komponenta sile zatezanja povući nazad. Ovakvo pomeranje prstena će proizvesti reflektovani puls koji nije invertovan i koji ima istu amplitudu i oblik kao i dolazni puls.

Na kraju, interesantno je razmotriti situaciju koja je između ove dva. To je slučaj kada se deo upadnog pulsa reflektuje a deo prodje kroz granicu između dve sredine. Pretpostavimo da je relativno tanak konopac prikačen na deblji (veće mase po jedinici dužine, slika (4.12)). Kada puls koji se kreće duž tanjeg konopca dodje do razdeobne površine sa debljim konopcem, deo njega se reflektuje i invertuje a deo prodje u deblji konopac bez invertovanja.¹²

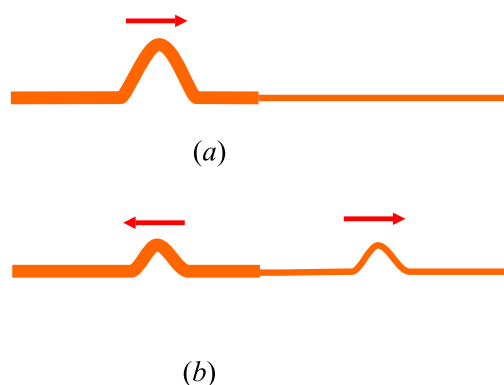
Primetimo da reflektovani puls ima manju amplitudu od upadnog. Kasnije ćemo videti da amplituda ima vezu sa energijom koju nosi talas, tako

¹²Reflektovani talas je invertovan iz razloga već opisanih kod situacije kada se puls odbija o fiksiran kraj konopca.



Slika 4.12: (a) Puls koji se prostire kroz tanji konopac prikačen za deblji konopac. (b) Deo upadnog talasa se reflektovao i invertovao a deo je prošao u drugi konopac i nije invertovan.

da je činjenica da su amplitude reflektovanog i transmitovanog pulsa manje od amplitude upadnog pulsa u stvari u vezi sa zakonom održanja energije.



Slika 4.13: (a) Puls koji se prostire kroz deblji konopac prikačen za tanji. (b) Deo upadnog talasa se reflektovao i nije invertovao a deo je prošao u drugi konopac i takodje nije invertovan.

Ukoliko je situacija obrnuta, odnosno ako puls prolazi prvo kroz deblji konopac, deo se opet reflektuje a deo prolazi u drugi konopac. U ovom slučaju reflektovani puls nije invertovan.¹³

¹³Ovo je posledica zaključaka koji su se odnosili na odbijanje pulsa o kraj konopca koji može da se kreće u vertikalnoj ravni.

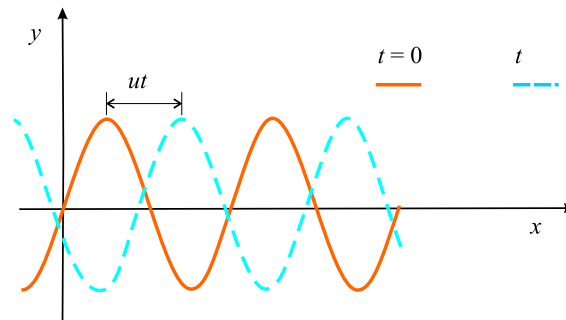
Može da se zaključi da od odnosa linijskih gustina ovih dveju sredina zavisi da li će pri refleksiji doći do invertovanja pulsa.

U skladu sa jednačinom (4.5), brzina talasa opada kada masa po jedinici dužine raste. Drugim rečima, puls se kreće sporije kroz gušći konopac (ukoliko su oba zategnuta jednakim silama zatezanja).

Može da se zaključi da važi sledeće pravilo: **Kada se puls kreće iz sredine A u sredinu B i $u_A > u_B$ (sredina B je gušća od sredine A), puls se pri refleksiji invertuje. Ako puls prelazi iz sredine A u sredinu B i $u_A < u_B$ (A je sredina gušća od B), puls se ne invertuje pri refleksiji.**

4.4 Sinusoidalni talasi

Talas predstavljen punom krivom linijom sa slike 4.14 se naziva sinusoidalnim, obzirom da ova linija ima isti oblik kao i grafik funkcije $\sin \theta$. Sinusoidalni



Slika 4.14: Jednodimensionalni progresivni sinusoidalni talas koji se kreće sa leva na desno brzinom u . Puna linija predstavlja sliku talasa u $t = 0$, dok isprekidana linija predstavlja isti talas u nekom docnijem momentu vremena t .

talas je najprostiji primer periodičnog neprekidnog talasa i može da se iskoristi za predstavljanje složenijih talasa. Puna linija na ovom grafiku predstavlja sinusoidalni progresivni talas u $t = 0$, dok isprekidana predstavlja isti talas u nekom docnijem trenutku vremena t . Sa slike se vidi da u $t = 0$ funkcija koja opisuje položaj delića sredine koja je podvrgnuta talasnom kretanju, može da se zapiše u obliku

$$y = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right), \quad (4.6)$$

gde konstanta A predstavlja amplitudu a konstantna veličina λ je talasna dužina. Ovakva talasna funkcija odražava činjenicu da je elongacija čestica sredine ista kada se njihova x koordinata promeni za celobrojni umnožak talasne dužine.¹⁴

Kako se talas kreće na desno brzinom u , talasna funkcija u nekom docnijem momentu vremena t je

$$y = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ut) \right], \quad (4.7)$$

i ovo bi bila jednačina koja opisuje talas koji je za vreme t prešao put ut na desno, kao što je prikazano isprekidanom linijom na slici 4.14.¹⁵

Po definiciji, talas predje put od jedne talasne dužine za vreme od jednog perioda T . Na osnovu toga su brzina, period i talasna dužina talasa povezani jednačinom

$$u = \frac{\lambda}{T}. \quad (4.8)$$

Ako se iskoristi ovaj izraz za brzinu i zameni u jednačinu (4.7) ona postaje

$$y(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]. \quad (4.9)$$

Ovakva forma talasne jednačine jasno odražava periodičnu prirodu veličine y . Za bilo koji izabrani momenat vremena, t , kao što je već naglašeno, y ima istu vrednost u tačkama x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ itd. Iz ovog izraza se medjutim vidi da postoji periodičnost i u vremenu, pa tako za datu vrednost x koordinate, vrednost y je ista za momente vremena t , $t + T$, $t + 2T$, itd.

Talasna funkcija se može zapisati i u drugoj uobičajenoj formi ako se definišu dve nove veličine, talasni broj k i ugaona frekvenca ω :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4.10)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.11)$$

¹⁴Drugim rečima vrednost koordinate y je ista tačkama x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, ..., $x + k\lambda$, .. gde je k ceo broj, što je lako proveriti zamenom u jednačinu(4.6).

¹⁵Primetimo da ova talasna funkcija ima oblik $f(x - ut)$ i da prema tome opisuje talas koji se kreće u pozitivnom smeru x ose, odnosno sa leva na desno. Ukoliko je reč o talasu koji se kreće sa desna na levo, izraz $x - ut$, treba zameniti sa $x + ut$, kao što je ustanovljeno prilikom analize jednačina (4.1) i (4.2).

Sada se jednačina (4.9) može zapisati u kompaktnijoj formi

$$y = A \sin(kx - \omega t). \quad (4.12)$$

Frekvencija sinusoidalnog talasa je povezana sa periodom izrazom

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (4.13)$$

Ako se iskoriste jednačine (4.10), (4.11) i (4.13) izraz za brzinu (4.8) se može zapisati u dve alternativne forme

$$u = \frac{\omega}{k}, \quad (4.14)$$

$$u = \lambda \nu. \quad (4.15)$$

Talasna funkcija zadata jednačinom (4.12) podrazumeva da je vertikalno pomeranje delića sredine y u $x = 0$ i u momentu $t = 0$ jednako nuli. Kako to ne mora da je slučaj, opštiji izraz za talasnu funkciju je oblika

$$y = A \sin(kx - \omega t + \varphi), \quad (4.16)$$

pri čemu je φ početna faza talasa.

Sinusoidalni talasi na žici

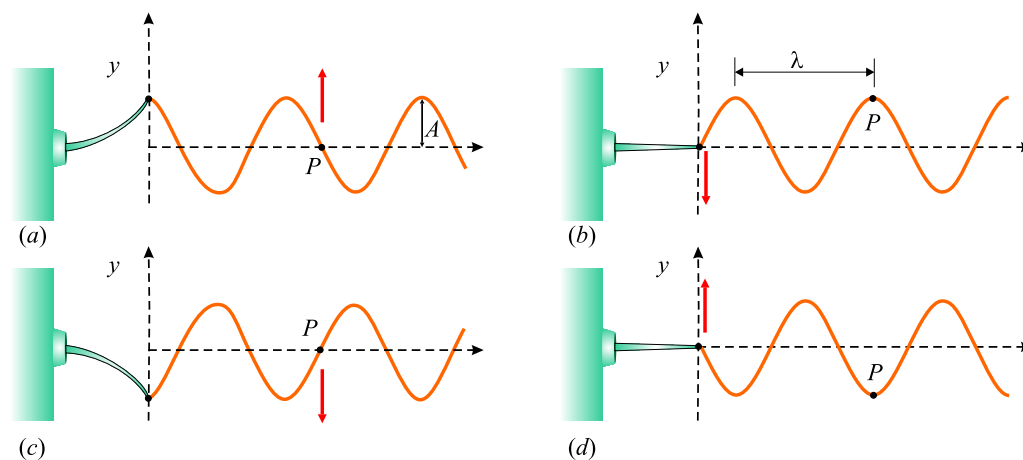
Na slici 4.3 je prikazano kreiranje pulsa na zategnutoj žici njenim okidanjem. Da bi se stvorio niz pulseva, talas, potrebno je stalno na ravnomeran način okidati žicu, odnosno, potrebno je da se na njoj, nalazi izvor koji linearno harmonijski osciluje.

Na slici 4.15 se vidi da svaki delić žice osciluje prosto harmonijski frekvencijom jednakom frekvenciji oscilovanja poluge koja izaziva talas na žici. Naravno, iako delići žice osciluju u y pravcu, kreirani (transverzalni) talas putuje duž x ose, brzinom u .

Ukoliko je talas u $t = 0$ izgledao kao na delu (b) slike 4.15, njegova talasna funkcija je

$$y = A \sin(kx - \omega t).$$

Posmatrana tačka P , kao i bilo koja druga tačka na žici, se kreće jedino vertikalno, odnosno njena x koordinata je konstantna. Usled toga, brzina



Slika 4.15: Jedan od metoda za kreiranje niza talasnih pulseva na zategnutoj žici. Levi kraj žice je prikazan za polugu koja harmonijski osciluje. Svaki delić žice, na primer tačka P , učestvuje u prostom harmonijskom oscilovanju u vertikalnom pravcu.

transverzalnog kretanja delića sredine v_y (ov brzinu ne treba mešati sa brzinom prostiranja talasa u), i odgovarajuće transverzalno ubrzanje a_y su

$$v_y = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=const} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t), \quad (4.17)$$

$$a_y = \left. \frac{dv_y}{dt} \right|_{x=const} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t). \quad (4.18)$$

Imajući u vidu da talasna funkcija y zavisi od x i t , u prethodnim izrazima se ne nalaze njeni obični već takozvani parcijalni.¹⁶ Amplitudne vrednost transverzalne brzine i ubrzanja su, na osnovu prethodna dva izraza,

$$v_{y,max} = \omega A, \quad (4.19)$$

$$a_{y,max} = \omega^2 A. \quad (4.20)$$

Kao što se vidi iz jednačina (4.17) i (4.18), ova brzina i ubrzanje ne dostižu istovremeno maksimalne i minimalne vrednosti. Transverzalna brzina ima maksimalnu vrednost kada je $y = 0$ (tada je ubrzanje jednako nuli), dok joj

¹⁶Prilikom nalaženja izvoda $\partial y/\partial t$, na primer, nalazi se izvod po vremenu, smatrajući da je promenljiva x konstanta.

je vrednost nula kada je $y = \pm A$ (tada ubrzanje dostiže svoju amplitudnu vrednost).

P r i m e r X. Delići žice prikazane na slici 4.15 pobudjuju se na oscilovanje frekvencijom 5 Hz. Amplituda ovog kretanja je 12 cm, a brzina nastalog talasa 20 m/s. Odrediti ugaonu frekvenciju ω , talasni broj k i napisati izraz koji opisuje talasnu funkciju. Odrediti maksimalne vrednosti transverzalne brzine i ubrzanja ma kog delića žice.

R e š e n j e. Na osnovu jednačina (4.11), (4.10) i (4.12) se dobija da je

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi(5Hz) = 31,4\text{rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{31,4\text{rad/s}}{20\text{m/s}} = 1,57\text{ rad/m.}$$

Kako je $A = 12\text{ cm} = 0,12\text{ m}$, talasna funkcija je

$$y = A \sin(kx - \omega t) = (0,12\text{ m}) \sin(1,57x - 31,4t),$$

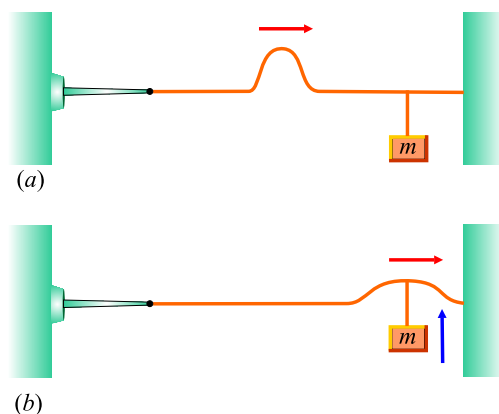
dok su amplitudne vrednosti transverzalne brzine i ubrzanja, prema (4.19) i (4.20)

$$v_{y,max} = 3,77\text{ m/s}, \quad a_{y,max} = 118\text{ m/s}^2.$$

4.4.1 Energija i intenzitet talasa

Kada se talas prostire kroz neku sredinu, on zapravo prenosi energiju kroz nju. To može lako da se demonstrira ako se o zategnuti kanap okači neko telo, pa se duž kanapa pošalje jedan puls ka njemu (slika 4.16). Kada puls stigne do okačenog tela, doći će do njegovog pomeranja (slika 4.16 (b)). I kako je za pomeranje tela bila neophodna energija, ona je uzeta iz pulsa odakle sledi da se zaista pri talasnim procesima kroz sredinu transferiše energija. I pošto talasi pri prolasku kroz sredinu prenose energiju, od interesa je izvesti izraz iz koga bi ona mogla da se izračuna. To će biti uradjeno na primeru jednodimenzionalnog sinusoidalnog talasa.

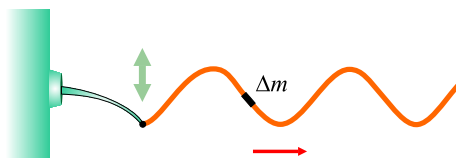
Razmotrimo sinusoidalni talas predstavljen na slici 4.17. Izvor talasa vrši rad nad žicom, pomerajući je gore-dole. Na taj način se ubacuje energija u sistem koja se, putem nastalog talasa, prenosi kroz žicu prema njenom drugom kraju. Uočimo na žici njen delić mase Δm i dužine Δx . Svaki delić žice vrši prosto harmonijsko oscilovanje po vertikali. Štaviše, svi delići imaju istu



Slika 4.16: (a) Puls koji se prostire kroz zategnutu žicu na koju je okačen teg mase m . (b) Kada puls stigne do tela energija se prenosi na njega.

ugaonu frekvenciju ω i istu amplitudu A . Kako je ranije pokazano, potencijalna energija pridružena prostom harmonijskom kretanju je $U = 1/2ky^2$, obzirom da se harmonijsko kretanje odvija u y pravcu. Koristeći relaciju $\omega^2 = k/m$, izraz za potencijalnu energiju postaje $U = 1/2m\omega^2y^2$. Ukoliko primenimo tu jednačinu na delić žice mase Δm , njegova potencijalna energija je

$$\Delta U = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2y^2.$$



Slika 4.17: Sinusoidalni talas koji se prostire duž zategnute žice. Svaki delić žice se kreće vertikalno i ima jednaku energiju.

Ako se uvede da je masa po jedinici dužine žice $\mu = \Delta m/\Delta x$, potencijalna energija delića žice je

$$\Delta U = \frac{1}{2}\mu\Delta x\omega^2y^2,$$

ili u diferencijalnom obliku (za veoma male deliće dužine dx)

$$dU = \frac{1}{2}\mu dx\omega^2y^2.$$

Nakon ubacivanja izraza za talasnu funkciju y , za bilo koji momenat vremena se dobija

$$dU = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)dx.$$

Bez da se izgubi na opštosti, moguće je posmatrati talasnu funkciju u $t = 0$, kada je potencijalna energija proizvoljnog delića žice

$$dU = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \sin^2 kx \, dx.$$

Da bi dobili potencijalnu energiju koju poseduje deo žice dužine jedne talasne dužine, treba integraliti prethodni izraz duž tog segmenta, odnosno

$$\begin{aligned} U_\lambda &= \int dU = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \sin^2 kx \, dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \sin^2 kx \, dx \\ &= \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4k} \sin 2kx \right]_0^\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda. \end{aligned}$$

Kako se delići žice kreću, poseduju i kinetičku energiju. Ukoliko primenimo analognu proceduru u analizi kinetičke energije na delu žice dužine jedne talasne dužine, dobićemo isti rezultat

$$E_{k,\lambda} = \int dE_k = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda,$$

pa će ukupna energija jedne talasne dužine žice biti jednaka zbiru kinetičke i potencijalne energije

$$E_\lambda = E_{k,\lambda} + U_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda. \quad (4.21)$$

Kada se talas kreće duž žice, tolika količina ukupne energije prolazi kroz datu tačku žice u toku vremena od jednog perioda. Na osnovu ovoga se može odrediti snaga talasa, odnosno brzina prenosa energije talasom, kao

$$P = \frac{E_\lambda}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T}.$$

Kako je odnos talasne dužine i perioda jednak brzini prostiranja talasa, za snagu se dobija

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 u. \quad (4.22)$$

Ovaj izraz pokazuje da je brzina prenosa energije sinusoidalnim talasom na žici, proporcionalna: a) brzini talasa, b) kvadratu njegove frekvencije i c) kvadratu amplitude.¹⁷

Na ovom mestu je zgodno uvesti još par korisnih relacija. Podje li se od izraza za gustinu mase $\rho = \Delta m / \Delta V$, kako je $\Delta V = \Delta S \lambda$ gde je ΔS površina poprečnog preseka parčeta žice dužine λ , koristeći činjenicu da je linijska gustina $\mu = \Delta m / \lambda$, ukupna energija tog dela žice je

$$E_\lambda = \frac{1}{2} \rho \Delta S \omega^2 A^2 \lambda = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \Delta V.$$

Uvede li se pojam o gustini energije ϵ , kao odnos energije dela sredine E_λ i zapremine tog dela sredine ΔV , dolazi se do sledeće relacije

$$E_\lambda = \epsilon \Delta V.$$

Na osnovu ovoga se za intenzitet talasa (količina energije koja u jedinici vremena prodje kroz jedinicu površine žice, normalno na pravac prostiranja talasa) dobija

$$I = \frac{E_\lambda}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{\Delta S T} \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \Delta V = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u, \quad (4.23)$$

odnosno

$$I = \epsilon u. \quad (4.24)$$

P r i m e r X2. Žica, linijske gustine mase $\mu = 5 \cdot 10^{-2}$ kg/m, je zategnuta silom od 80 N. Kolika treba da bude snaga talasnog izvora koji bi na žici generisao sinusoidalni talas frekvencije 60 Hz i amplitude 6 cm?

R e š e n j e. Brzina talasa na žici je

$$u = \sqrt{\frac{F_z}{\mu}} = \sqrt{\frac{80 \text{ N}}{5 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}}} = 40 \text{ m/s}.$$

Kako je frekvencija talasa 60 Hz, ugaona frekvencija ω će biti

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi(60 \text{ Hz}) = 377 \text{ s}^{-1}.$$

Uzimajući u obzir da je amplituda data i da iznosi $A = 6$ cm, za snagu se dobija

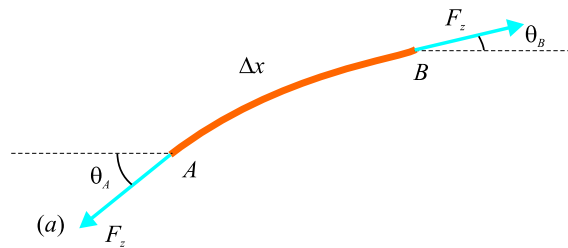
$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 u = 512 \text{ W}.$$

¹⁷Kako je brzina talasa vezana za karakteristike sredine (kao i linijska gustina μ , može se reći da je snaga talasa zapravo proporcionalna kvadratima amplitude i ugaone frekvencije talasa.

4.5 Talasna jednačina

4.5.1 Transverzalni talas na zategnutoj žici

Talasna funkcija je uvedena da bi reprezentovala prostiranje talasa duž zategnute žice. Sve talasne funkcije $y(x, t)$ se u stvari mogu smatrati rešenjima talasne jednačine. Ta jednačina daje kompletan opis talasnog procesa a iz nje se, u principu može dobiti i izraz za brzinu talasa. Štaviše, iako će ta jednačina ovde biti izvedena za prostiranje talasa na zategnutoj žici, ispostavlja se da ona važi i za druge vrste talasnih kretanja.



Slika 4.18: Delić žice zategnute silom zatezanja F_z . Nagibi žice u tačkama A i B su $\tan \theta_A$ i $\tan \theta_B$.

Pretpostavimo da se talas, izazvan malim oscilacijama jednog njenog kraja, prostire duž žice koja ja zategnuta silom zatezanja F_z i posmatramo jedan njen deo dužine Δx . Krajevi tog delića zaklapaju male uglove θ_A i θ_B sa x osom. Rezultujuća sila koja deluje na delić u vertikalnom pravcu je

$$\sum F_y = F_z \sin \theta_B - F_z \sin \theta_A = F_z (\sin \theta_B - \sin \theta_A).$$

Kako se radi o malim uglovima, može da se primeni aproksimacija $\sin \theta \approx \tan \theta$, pa će prethodni izraz biti

$$\sum F_y = F_z (\tan \theta_B - \tan \theta_A).$$

Sa druge strane, tangens ugla predstavlja koeficijent pravca tangente na talasnu funkciju, a to je jednako izvodu po x talasne funkcije, odnosno $\partial y / \partial x$, pa ćemo dalje imati

$$\sum F_y \approx F_z \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right]. \quad (4.25)$$

Primena II Njutnovog zakona na posmatrani delić žice, pošto je njegova masa $\Delta m = \mu \Delta x$ daje

$$\sum F_y = ma_y = \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right). \quad (4.26)$$

Kombinovanje ovih dveju jednačina dovodi do izraza

$$\begin{aligned} \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) &\approx F_z \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right] \\ \frac{\mu}{F_z} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &\approx \frac{(\partial y / \partial x)_B - (\partial y / \partial x)_A}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Desna strana ove jednačine može da se zapiše u drugom obliku ako se ima u vidu da se parcijalni izvod ma koje funkcije definiše kao

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

U izrazu (4.27), ulogu $f(x + \Delta x)$ igra $(\partial y / \partial x)_B$, a $f(x)$ sabirak $(\partial y / \partial x)_A$, pa ova jednačina poprima oblik

$$\frac{\mu}{F_z} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (4.28)$$

i predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja žice linijske gustine μ zategnute silom zatezanja F_z .¹⁸

Relativno lako se pokazuje da sinusoidalna talasna funkcija jeste rešenje ove jednačine. Naime, ako je zapisemo u obliku $y = A \sin(kx - \omega t)$, odgovarajući drugi izvodi su

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t).$$

Zamena ovih izraza u jednačinu (4.28), daje

$$-\frac{\mu \omega^2}{F_z} \sin(kx - \omega t) = -k^2 \sin(kx - \omega t),$$

¹⁸Napomenimo da je talasna jednačina direktna posledica II Njutnovog zakona, odnosno njegove primene na delić žice.

na osnovu čega je jasno da mora da važi sledeća veza

$$k^2 = \frac{\mu\omega^2}{F_z}.$$

Kako je $u = \omega/k$, sredjivanjem se dobija ponovo jednačina (4.10)

$$u = \sqrt{\frac{F_z}{\mu}}.$$

Talasna jednačina (4.28) se često piše u obliku

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (4.29)$$

Pokazalo se da je jednačina ovog tipa veoma opšta. U ovom slučaju ona opisuje vertikalno pomeranje delića zategnute žice. Kao što će kasnije biti pokazano, za akustične talase, y predstavlja pomeranje molekula vazduha iz njihovog ravnotežnog položaja ili pak odstupanje pritiska (ili koncentracije) gasa od njihovih ravnotežnih vrednosti. U slučaju pak elektromagnetnih talasa, y opisuje električno ili magnetno polje.¹⁹

P r i m e r X. Alpinista se, koristeći konopac, spušta niz vertikalnu stenu. U momentu kada se spustio $l = 30$ m od vrha stene njegov partner, koji je ostao gore, mu daje znak tresući konopac. Za koje vreme će ovaj signal doći do alpiniste? Njegova masa je 80 kg a masa jedinice dužine konopca je 75 g.

R e š e n j e. Sila zatezanja konopca je, u ovom slučaju, $F_z = Q = mg$ pa je brzina nastalog transverzalnog talasa

$$u = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 9,81}{7,5 \cdot 10^{-2}}} = 102 \text{ m.}$$

Vreme potrebno talasu ove brzine da predje rastojanje od 30 m je $t = l/u = 30/102 = 0,3$ s.

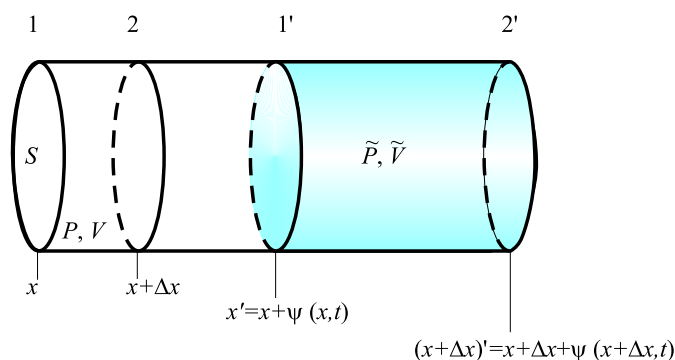
4.5.2 Longitudinalni talas u idealnom gasu

Razmotrimo talasni proces u gasu koji je nastao usled malog poremećaja koji se desio duž x ose. Za razliku od transverzalnog karaktera oscilovanja delića

¹⁹Ovde je dokazano da je sinusoidalna talasna funkcija jedno od rešenja talasne jednačine. Može da se pokaže, kao što je ranije napominjano, da je bilo koja funkcija oblika $f(x \pm ut)$ takodje rešenje talasne jednačine.

žice, delovi gasa se pomeraju u pravcu nastalog poremećaja pa je talas koji pri tom nastaje longitudinalan i sastoji se od niza zgušnjjenja i razredjenja u gasu. Veličina pomeranja delića gasa zavisi od toga gde se nalaze na pravcu prostiranja talasa kao i od momenta vremena pa ćemo ih označiti nekom nepoznatom funkcijom ovih dveju promenljivih $\Psi(x, t)$.

Posmatrajmo malenu zapreminu gasa, ograničenu dvema poprečnim presecima "1" i "2" koji se nalaze u tačkama sa koordinatama x i $x + \Delta x$ (slika 4.19).



Slika 4.19: Longitudinalni talas u gasu.

Masa gasa u ovoj zapremini je $\Delta m = \rho S \Delta x$, gde je ρ gustina gasa, a S površina poprečnog preseka. Neka je u stacionarnom stanju pritisak gasa P .

Kada nastane poremećaj u gasu, molekuli gasa se pomere a to može da se predstavi kao da se ova zapremina pomerila u novi položaj izmedju preseka 1' i 2' sa koordinatama $x + \Psi(x, t)$ i $x + \Delta x + \Psi(x + \Delta x, t) \approx x + \Psi(x, t) + \Delta x[1 + \Psi'(x, t)]$. Zapremina gasa u novom položaju je $\tilde{V} = S \Delta x [1 + \Psi'(x, t)]$, a pritisak je \tilde{P} . Ovaj novi pritisak se može dovesti u vezu sa silom koja deluje na posmatranu zapreminu gasa. U tu svrhu je prvo potrebno izvesti izraz kojim se opisuje pritisak \tilde{P} .

Oscilatorni proces u gasu se odvija dovoljno brzo, tako da se može smatrati da posmatrana zapremina nije stigla da razmeni toplotu sa ostatkom gasa koji je okružuje. Usled toga, se ovaj proces može smatrati adijabatskim pa za posmatrana dva stanja gasa važi relacija

$$PV^\kappa = \tilde{P}\tilde{V}^\kappa,$$

gde je κ izložilac adijabate, odnosno

$$P(S\Delta x)^\kappa = 0\tilde{P}(S\Delta x[1 + \Psi'(x, t)])^\kappa. \quad (4.30)$$

Ako se ova jednačina reši po traženom pritisku, dobija se

$$\tilde{P} = \frac{P}{[1 + \Psi'(x, t)]^\kappa} \approx P[1 - \kappa\Psi'(x, t)]. \quad (4.31)$$

Sila koja deluje na posmatrani delić gasa se može dobiti iz razlike pritisaka u preseccima "1" i "2"

$$F = S(\tilde{P}_{1'} - \tilde{P}_{2'}), \quad (4.32)$$

jer pritisak opada u smeru prostiranja talasa. Kako se radi o malim pomeranjima važi aproksimativna formula

$$\tilde{P}' \approx \frac{\tilde{P}_{2'} - \tilde{P}_{1'}}{\Delta x},$$

pa je sila

$$F = -\tilde{P}'S\Delta x. \quad (4.33)$$

Nakon nalaženja izvoda pritiska (zadatog formulom (4.31)), za silu se dobija

$$F = \kappa P\Psi''(x, t)S\Delta x, \quad (4.34)$$

a II Njutnov zakon za posmatrani deo gasa, $\Delta m\ddot{\Psi} = F$, postaje

$$\rho S\Delta x\ddot{\Psi} = \kappa P\Psi''(x, t)S\Delta x. \quad (4.35)$$

Nakon skraćivanja ova relacija može da se predstavi u obliku

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.36)$$

gde je

$$u = \sqrt{\frac{\kappa P}{\rho}}, \quad (4.37)$$

brzina prostiranja posmatranog longitudinalnog talasa.

Jednačina (4.37) ima potpuno istu formu kao i jednačina (4.29) koja opisuje transverzalne talase u zategnutoj žici, i ima rešenja potpuno istog oblika, iako one opisuju procese u potpuno različitim sistemima.

Ako iskoristimo jednačinu stanja idealnog gasa $PV = n_m RT$, pišući broj molova n_m kao odnos mase gasa m i njegove molarne mase M , a gustinu u

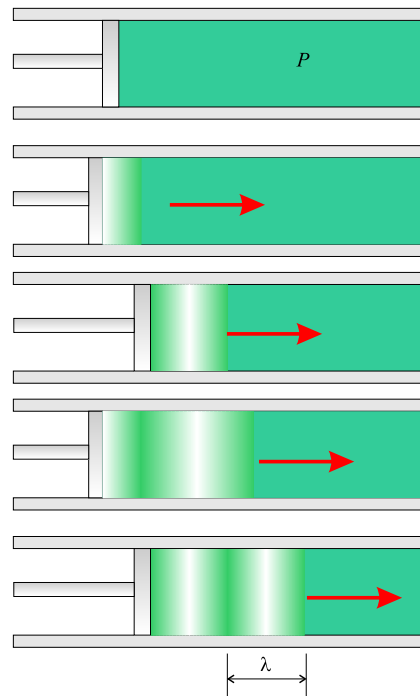
izrazu (4.37) kao odnos mase gasa i njegove zapremine V , brzina longitudinalnog talasa u gasu poprma veoma važnu formu

$$u = \sqrt{\frac{\kappa R}{M} T}, \quad (4.38)$$

gde je T apsolutna termodinamička temperatura gasa. Kao što se vidi, brzina talasa u gasu je srazmerna sa \sqrt{T} sa faktorom koji, za dati gas, predstavlja konstantu. Na primer za vazduh, ovaj izraz glasi $u = 20\sqrt{T}$ m/s.

Zvučni talasi u vazduhu

Jednodimenzionalni zvučni talas je moguće proizvesti stvaranjem poremećaja u rasporedu čestica gasa, a time i koncentracije, u odnosu na njihov ravnotežni raspored, odnosno ravnotežnu vrednost koncentracije. Jedan od načina da se to uradi je oscilatorno pomeranje klipa koji se nalazi na jednom kraju duge i tanke cevi (slika 4.20).



Slika 4.20: Stvaranje longitudinalnog talasa u cevi sa gasom.

Tamnije obojene oblasti na ovoj slici predstavljaju delove gasa gde je on sabijen i pod većim pritiskom od ravnotežne vrednosti. Ovakve oblasti se formiraju pri utiskivanju klipa u cev. Te oblasti se prostiru kroz cev kao puls koji stalno pritiska oblasti uz koje se nalazi. Kada se klip pomeri u levo, oblast gasa koja se nalazi u njegovoj blizini se širi ka njemu i razredjuje tako da je to oblast (svetlije obojena) u kojoj je pritisak gasa manji od njegove ravnotežne vrednosti. Ovakve oblasti se takodje kreću kroz gas prateći oblasti u kojima je gas zgusnutiji. I oblasti razredjenja i oblasti zgušnjavanja se kreću kroz gas brzinom zvuka za tu sredinu.

Ukoliko klip osciluje na sinusoidalnom načina, i oblasti zgušnjavanja i razredjenja će se tako smenjivati. Rastojanje između dve susedne oblasti zgušnjavanja (ili razredjenja) je jednako talasnoj dužini nastalog longitudinalnog talasa. Kako se te oblasti pomeraju kroz cev, tako neki posmatrani deo zapremine vrši prosto harmonijsko oscilovanje paralelno pravcu prostiranja talasa. Kako je veličina tog pomeranja (od ravnotežnog položaja) označena sa $\Psi(x, t)$, obzirom na karakter kretanja, njena funkcionalna zavisnost se može zapisati u obliku

$$\Psi(x, t) = \Psi_m \sin(kx - \omega t), \quad (4.39)$$

gde je Ψ_m amplituda talasa, odnosno maksimalno pomeranje delića sredine od njihovog ravnotežnog položaja. Sa k je naravno označen talasni broj, a sa ω ugaona frekvencija oscilovanja klipa.²⁰

Pomeranje čestica gasa dovodi do pojave dodatnog pritiska $\Delta P = \tilde{P} - P$ u datoj oblasti. Ova razlika u pritiscima je, prema jednačini (4.31), jednaka

$$\Delta P = -\kappa P \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = -\kappa P k \Psi_m \cos(kx - \omega t) = -\frac{\kappa P \omega}{u} \Psi_m \cos(kx - \omega t). \quad (4.40)$$

Koristeći izraz za brzinu (4.37), dobija se relacija koja opisuje talase pritiska u gasu u obliku

$$\Delta P = -\rho \omega u \Psi_m \cos(kx - \omega t), \quad (4.41)$$

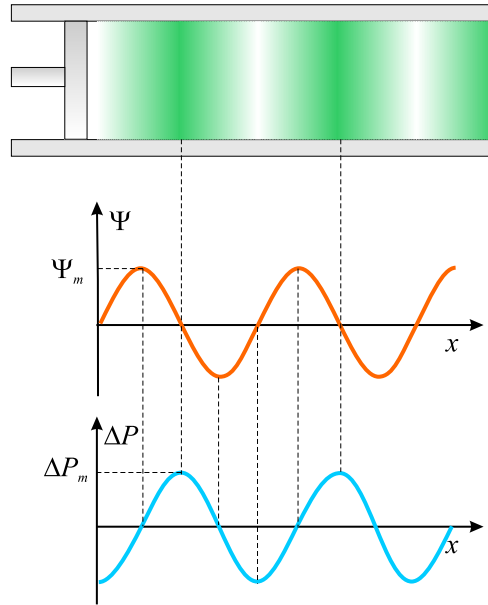
odakle se vidi da je amplituda pritiska

$$\Delta P_m = \rho \omega u \Psi_m. \quad (4.42)$$

Dakle, pokazano je da se zvučni talas može posmatrati ili kao talas pomeranja čestica gasa ili kao talas pritiska. Upoređivanjem jednačina (4.39) i (4.41) se

²⁰Primetimo da se pomeranje delića sredine vrši duž x ose, odnosno u pravcu kretanja talasa.

vidi da su ova dva talasa pomerena u fazi za $\pi/2$. Za maksimalno pomeranje $\Psi(x, t) = \Psi_m$, pritisak je jednak stacionarnoj vrednosti P , odnosno promena u pritisku je $\Delta P = 0$ (slika 4.21).²¹



Slika 4.21: Pomeranje čestica i pritisak u funkciji x .

Intenzitet zvučnog talasa je, prema (4.23)

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \Psi_m^2 u, \quad (4.43)$$

što, ako se izrazi preko promene pritiska u gasu postaje

$$I = \frac{\Delta P_m^2}{2\rho u}. \quad (4.44)$$

P r i m e r X. izračunati brzinu zvučnog talasa u vazduhu (molarna masa $M = 20 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, izložilac adijabate $\kappa = 1,4$) na sobnoj temperaturi (20°C).

²¹Sa slike se takodje jasno vidi da je, kada je gas maksimalno razredjen, odstupanje pritiska od ravnotežne vrednosti $-\Delta P_m$, a kada je gas maksimalno zgusnut, ono iznosi ΔP_m . Kada je reč o pomeranju čestica gasa, najveće pomeranje doživljavaju one koje se nalaze na mestima gde je odstupanje pritiska od ravnotežnog jednako nuli, jer će se one prilikom nailaska talasa najviše pomeriti, otići ce ili u oblast gde će biti zgusnutije ili u onu gde će biti razredjenije.

R e š e n j e. Prema relaciji (4.38) se za brzinu zvuka u vazduhu, na sobnoj temperaturi, dobija

$$u = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31 \cdot 293}{29 \cdot 10^{-3}}} \approx 343 \text{ m/s.}$$

P r i m e r X. Najslabiji zvuk frekvencije 1000 Hz koji ljudsko uvo može da čuje ima intenzitet oko $1 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$ (prag čujnosti). Najjači zvuk koji uvo može da podnese je intenziteta oko 1 W/m^2 (granica bola). Odrediti amplitudu pritiska i pomeranja za ova dva granična intenziteta zvuka.

R e š e n j e. Iz jednačine (4.44), uzimajući za brzinu zvuka 343 m/s, a za gustinu vazduha $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, dobija se

$$\Delta P_m = \sqrt{2\rho u I} = 2,87 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2.$$

Kako je normalan atmosferski pritisak reda veličine 10^5 N/m^2 , ovaj rezultat ukazuje na to da ljudsko uvo predstavlja veoma osetljivi prijemnik jer može da razazna fluktuacije u pritisku u iznosu od $3 \cdot 10^{-10}$.

Amplituda pomeranja molekula se može dobiti iz (4.42), uz $\omega = 2\pi\nu$

$$\Psi_m = \frac{\Delta P_m}{\rho u \omega} = 1,11 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

Reč je ponovo o veoma maloj vrednosti, a jasan utisak o tome se stiče ako se ima u vidu da je poluprečnik molekula oko 10^{-10} m .

Na sličan način se dobija da se amplituda pritiska koju ljudsko uvo može da podnese $28,7 \text{ N/m}^2$, a da takvom talasu odgovara amplituda pomeranja od $1,11 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

4.5.3 Talasi u krutom telu

Kada se neki deo krutog tela pobudi na male oscilacije postaje izvor talasa koji se, zahvaljujući elastičnim osobinama krutog tela, prostire kroz njega. Proces prenošenja talasa kroz ovakvu sredinu je veoma sličan procesu koji se odnosi na prostiranje longitudinalnog talasa kroz gas. Neka slika 4.19 predstavlja skicu deformacije krutog tela. Njegova relativna deformacija (sabijanje ili izduženje) pri pomeranju delića za $\Psi(x, t)$ je

$$\delta = \frac{\Delta\Psi}{\Delta x} = \Psi'(x, t). \quad (4.45)$$

Prema Hukovom zakonu, usled toga se javlja elastična sila

$$F = SE_Y \delta = SE_Y \Psi'(x, t), \quad (4.46)$$

gde je E_Y koeficijent koji odražava elastične osobine sredine (Jungov modul elastičnosti). Razlika u silama između preseka "1" i "2" je

$$\Delta F = F_{2'} - F_{1'} = SE_Y \Psi''(x, t) \Delta x. \quad (4.47)$$

Polazeći od II Njutnovog zakona za ovaj deo sredine

$$\rho S \Delta x \ddot{\Psi}(x, t) = SE_Y \Psi''(x, t) \Delta x, \quad (4.48)$$

dobija se talasna jednačina, koja se poklapa sa ranijim jednačinama za zategnute žice i gasove:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.49)$$

ali sa brzinom

$$u = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}. \quad (4.50)$$

Ovom prilikom su razmatrane longitudinalne deformacije u krutom telu (i odgovarajući talas koji je pri tome nastao). Za razliku od gasova, elastične sile u krutim telima nastaju i pri deformacijama smicanja. Jednačina takvih, transverzalnih talasa, ima isti oblik (4.49), ali u izraz za brzinu sada ulazi modul smicanja E_s , pa je ona zadata kao

$$u = \sqrt{\frac{E_s}{\rho}}. \quad (4.51)$$

Napomenimo, bez izvodjenja, da za talase u tečnostima takodje važi talasna jednačina oblika (4.49) sa brzinom

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (4.52)$$

u kojoj je sa E označen zapreminski modul elastičnosti tečnosti kroz koju se prostire talas.

P r i m e r X. Kroz čeličnu šipku ($E_Y = 20,6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, $E_s = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) se prostire zvučni talas. Odrediti brzine njegovih komponenti (transverzalne i longitudinalne)

R e š e n j e. Brzina longitudinalne komponente u_{\parallel} je prema (4.50)

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{20,6 \cdot 10^{10}}{7,8 \cdot 10^3}} = 5,1 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 5,1 \text{ km/s},$$

dok je transverzalna u_{\perp} (4.51)

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10}}{7,8 \cdot 10^3}} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 3,2 \text{ km/s}.$$

P r i m e r X. Delfini koriste akustične talase za lociranje riba kojima se hrane. Eksperiment je pokazao da delfin može da detektuje objekte manje od 10 cm koji su od njega udaljeni 110 metara. Izračunati koliko interval vremena prodje između momenta emitovanja zvučnog talasa i momenta kada delfin registruje reflektovani talas. Zapreminski modul elastičnosti vode je $E = 2,1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

R e š e n j e. Ukupno rastojanje koje predje zvuk do mete udaljene 110 m i nazad do delfina je $\Delta x = 2 \cdot 110 \text{ m} = 220 \text{ m}$, pa je vreme potrebno da delfin čuje reflektovani zvuk $\Delta t = \frac{\Delta x}{u}$, gde je u brzina prostiranja talasa kroz vodu

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1,4 \text{ km/s}.$$

Na osnovu ovoga je traženo vreme

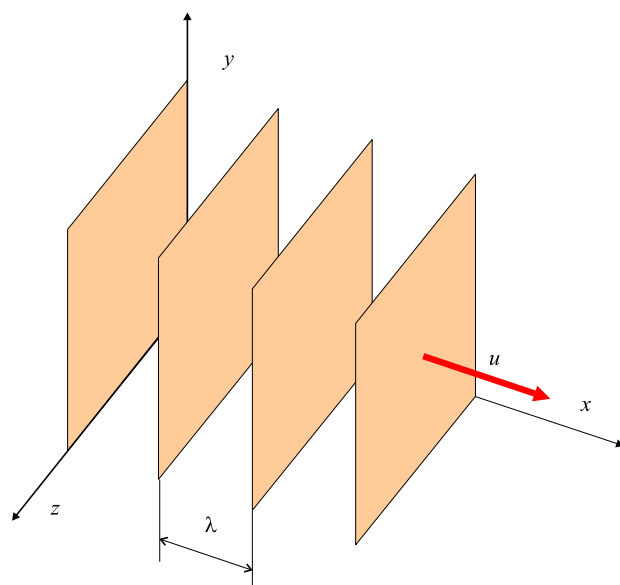
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = 0,16 \text{ s}.$$

4.6 Sferni i ravanski talasi

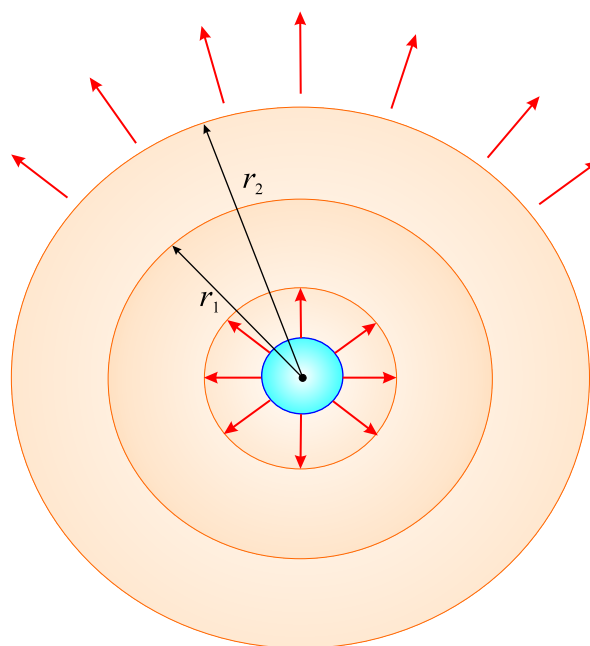
Do sada je razmatran specijalan tip talas čija faza $kx - \omega t + \varphi$, zavisila samo od koordinate x koja je usmerena u smeru kretanja talasa.

Ukoliko se uoči površ koju čine tačke koje osciluju u fazi, onda je to talasni front (površ konstante faze). Ako se, kod na primer prostiranja transverzalnog talasa, delići sredine osciluju na jednak način u svim tačkama površi normalne na pravac prostiranja talasa (x -osa), onda imamo posla sa ravanskim talasom (u yz ravni) jer je njegov talasni front ravan (slika 4.22).

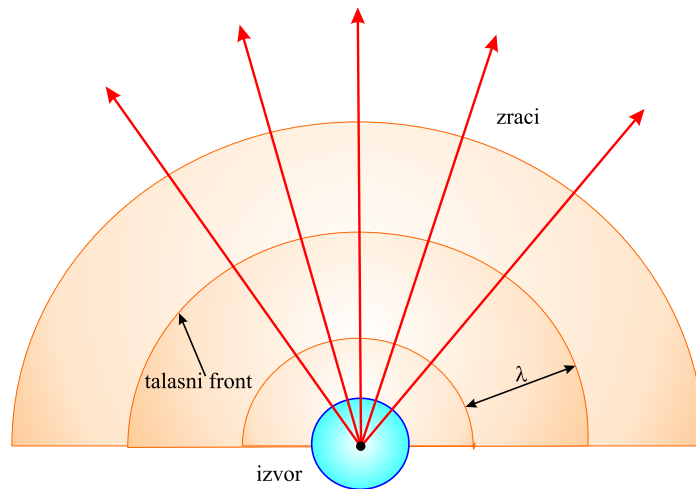
Ukoliko se u nekoj sredini (na primer gasu) nalazi neko sferno telo čiji poluprečnik osciluje sa vremenom, u sredini nastaju sferni talasi (slika 4.24).



Slika 4.22: Skica ravanskog talasa brzine u koji se prostire u pozitivnom smeru x ose. Talasni front su ravni paralelne yz ravni.



Slika 4.23: Sferni talas koji se prostire od oscilujućeg sfernog tela.



Slika 4.24: Sferni talas koji se prostire od oscilujućeg sfernog tela koje se ako je malo može smatrati tačkastim izvorom. Zraci su radijalne linije usmerene od izvora normalno na talasne frontove.

Ukoliko je sredina uniformna nastali talas se prostire od izvora konstantnom brzinom.

Kako se talas prostire uniformno, može da se zaključiti da se energija, kod sfernog talasa, prenosi u svim pravcima podjednako, jer nema pravca koji bi po necemu bio privilegovan.²² Ako sa P_{sr} označimo srednju snaga izvora koji emituje talase, tada kada je talas došao na rastojanje r od izvora, ona mora da se raspodeli na sfernu površ površine $4\pi r^2$. Drugim rečima, intenzitet talasa, na ovom rastojanju od izvora talasa, je

$$I = \frac{P_{sr}}{A} = \frac{P_{sr}}{4\pi r^2}. \quad (4.53)$$

Intenziteti istog talasa, na rastojanju r_1 i r_2 od izvora se razlikuju i iznose

$$I_1 = \frac{P_{sr}}{4\pi r_1^2}, \text{ i } I_2 = \frac{P_{sr}}{4\pi r_2^2},$$

a njihov odnos je

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

²²Za ovakve sredine, kod kojih nema ni jednog privilegovanog pravca se kaže da su izotropne.

Iz ova dva izraza se vidi da intenzitet talasa opada u obrnutoj proporciji sa kvadratom rastojanja od izvora.

Ako se pak izjednače desne strane jednačina (4.43) i (4.53) dobija se

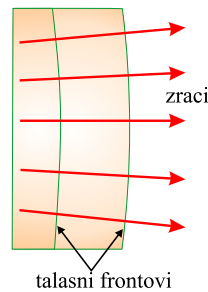
$$\frac{1}{2}\rho u\omega^2\Psi_m^2 = \frac{P_{sr}}{4\pi r^2}$$

odakle, se vidi da amplituda pomeranja Ψ_m mora da se sa udaljavanjem od izvora smanjuje obrnuto srazmerno rastojanju r od njega, odnosno $\Psi_m \sim 1/r$. Na osnovu toga je, talasna funkcija sfernog talasa, koji se širi od tačkastog izvora koji osciluje frekvencijom ω data izrazom

$$\Psi = \frac{\Psi_{m0}}{r} \sin(kr - \omega t), \quad (4.54)$$

gde je Ψ_{m0} , amplituda pomeraja na jediničnom rastojanju od izvora ($r = 1$).

Sferne talase je pogodno predstaviti kao niz koncentričnih kružnih lukova (slika 4.24), gde svaki od tih lukova predstavlja površ konstantne faze. Takve površi se, kao što je napomenuto zovu talasni frontovi. Rastojanje između dva susedna talasna fronta je jednako talasnoj dužini λ , a radijalne linije usmerene od izvora talasa se zovu zraci.



Slika 4.25: Daleko od tačkastog izvora, talasni frontovi postaju skoro paralelni, a zraci, koji su ortogonalni na njim su takodje medjusobno skoro paralelni. To znači da se uočeni mali deo sfernog talasa ponaša kao ravanski talas.

Ako izdvojimo jedan mali deo talasnog fronta, daleko od izvora talasa (slika 4.25, zraci koji prolaze kroz talasni front su skoro paralelni (što smo dalje od izvora talasa, odstupanje od paralelnosti zraka je sve manje), a talasni front je sve ravniji i ravniji. U skladu sa time, ukoliko je rastojanje od

izvora talasa mnogo veće od talasne dužine, sferni talasa se može aproksimirati ravnim. U tom slučaju, njegova talasna funkcija ima formu

$$\Psi(x, t) = \Psi_m \sin(kx - \omega t), \quad (4.55)$$

koja je identična funkciji koja je korišćena za opisivanje jednodimenzionalnih progresivnih talasa.

4.6.1 Doplerov efekat

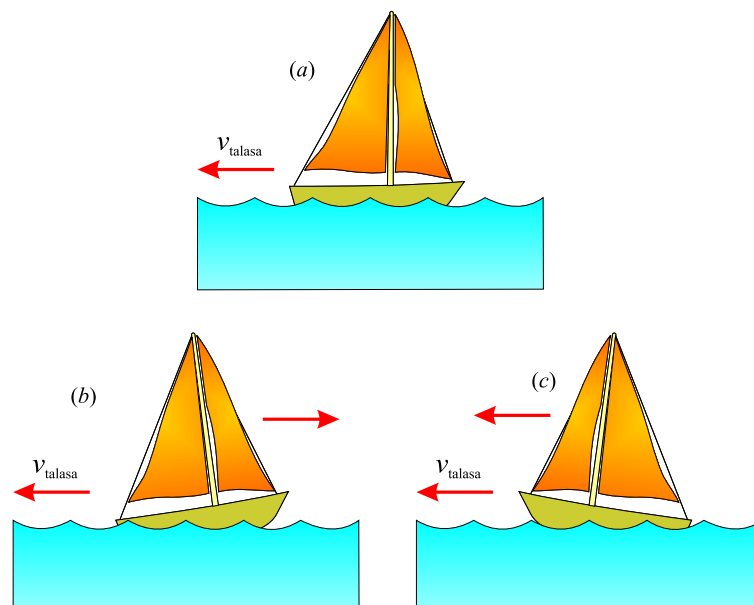
Verovatno smo svi primetili da se zvuk automobilske sirene menja dok automobil prolazi kraj nas. Frekvencija zvuka koji pri tome registruju naše uši, potaje sve viši i viši dok se automobil približava a opada kada on počne da se udaljava. Pri ovome naravno sirena sve vreme emituje zvuk iste frekvencije, a menja se frekvencija zvuka koji mi registrujemo. To je jedan primera takozvanog **Doplerovog efekta**.²³

Da bi razumeli šta izaziva prividnu promenu frekvencije talasa, zamislimo da se nalazimo na čamcu usidrenom na ustalasalom moru sa talasima perioda $T = 3,0$ s. To znači da će na svake 3,0 s čamac pogoditi breg talasa. Slika 4.26 (a) prikazuje tu situaciju, za slučaj kada se talasi kreću sa desna na levo. Ukoliko trenutak kada broj pogodi breg talasa proglašimo za početni trenutak posmatranja (odnosno resetujemo štopericu tako da u tom trenutku pokazuje nulu), nakon 3 sekunde će brod pogoditi naredni, nakon 6 sekundi drugi, itd. Na osnovu toga zaključujemo da je frekvencija talasa $\nu = 1/T = 1/3,0$ Hz.

Pretpostavimo da brod više nije usidren i da ga vetar nosi ka nadolazećim talasima (slik 4.26 (b)). Ukoliko opet resetujemo štopericu da bude na nuli u momentu kada breg talasa pogodi brod, primetićemo da će nas naredni breg pogoditi za manje od 3,0 s nakon prvog. Razlog je naravno taj što se brod kreće u susret talasima. Drugim rečima, period talasa koje "prima" brod je manji od 3,0 s, odnosno od perioda koji je registrovan kada je brod mirovao. Obzirom da je $\nu = 1/T$, to znači da će se na brodu registrovati talas veće frekvencije od one kada je brod bio u stanju mirovanja.

Ukoliko brod promeni smer kretanja i počne da se kreće u istom smeru kao i talasi registrovaće se suprotan efekat. Ponovo resetujemo štopericu u momentu kada brod pogodi breg talasa i merimo vreme do nailaska sledećeg. Primetiće se da je to vreme duže od 3,0 s, obzirom da je smer i talasa i broda

²³Ovaj efekat je dobio ime po Austrijskom fizičaru Kristijanu Johanu Dopleru (Christian Johann Doppler, 1803-1853), koji ga je otkrio kod svetlosnih talasa.



Slika 4.26: (a) Talasi se kreću ka stacionarnom brodu. (b) Brod se kreće ka izvoru talasa. (c) Brod se kreće od izvora talasa.

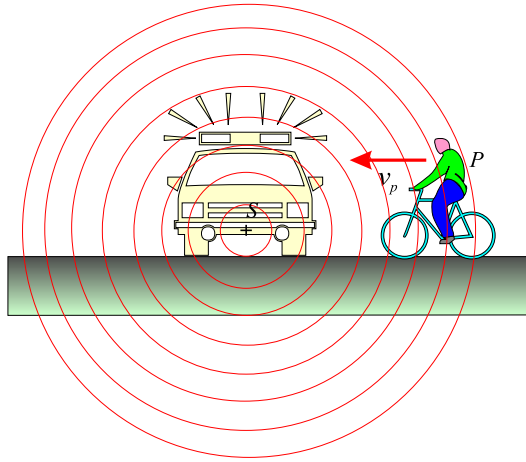
isti. Drugim rečima, period registrovanih talasa je veći a njihova frekvencija je manja nego u slučaju kada brod miruje.

Pomenuti efekti se dešavaju usled postojanja *relativne* brzine kretanja broda u odnosu na talase. Kada se brod kreće sa leva na desno, relativna brzina je veća od brzine talasa, što dovodi do registrovanja talasa veće frekvencije. Kada se brod kreće u suprotnom smeru, relativna brzina registrovanih talasa je manja, a time i frekvencija registrovanih talasa.

Izvršenu analizu je moguće proširiti na slučaj zvučnih talasa tako što ćemo prosto umesto da posmatramo prostiranje talasa na vodi, posmatrati prostiranje zvučnih talasa. Sada sredina kroz koju se prostiru talasi nije voda već vazduh, a umesto da pratimo ljuljanje broda na talasima, slušaćemo zvuk.

Pretpostavimo da se posmatrač P kreće a da je izvor zvučnog talasa S stacionaran. Pretpostavimo da je, takodje i vazduh u stanju mirovanja i da se posmatrač kreće brzinom v_p , direktno ka tačkastom, stacionarnom ($v_s = 0$) izvoru talasa (slika 4.27).²⁴

²⁴Treba imati u vidu da kada se kaže da je izvor stacionaran, misli se da se ne kreće u odnosu na sredinu kroz koju se prostire zvuk, odnosno u odnosu na vazduh.



Slika 4.27: Biciklista se kreće brzinom v_0 ka stacionarnom izvoru talasa S .

Neka su ν i λ frekvencija i talasna dužina, respektvino, izvora talasa, a da je brzina zvuka u . U slučaju kada se ne kreću ni izvor ni posmatrač ($v_s = 0$ i $v_p = 0$), frekvencija zvuka koji registruje posmatrač je jednaka frekvenciji zvučnog izvora. Kada se posmatrač kreće ka izvoru zvuka, brzina talasa u odnosu na njega postaje veća, i iznosi $u' = u + v_p$ (kao u slučaju broda), dok talasna dužina ostaje nepromenjena. Na osnovu jednačine $u = \lambda\nu$, zaključujemo da je frekvencija zvuka koga čuje posmatrač *uvećana* i da iznosi

$$\nu' = \frac{u}{\lambda} = \frac{u + v_p}{\lambda}.$$

Kako je $\lambda = u/\nu$, ovaj izraz može da se zapiše u obliku

$$\nu' = \left(1 + \frac{v_p}{u}\right) \nu \quad (\text{posmatrač se kreće ka izvoru}). \quad (4.56)$$

Ukoliko se posmatrač kreće od izvora, relativna brzina talasa u odnosu na posmatrača je $u' = u - v_p$, pa će frekvencija zvuka koji registruje posmatrač biti

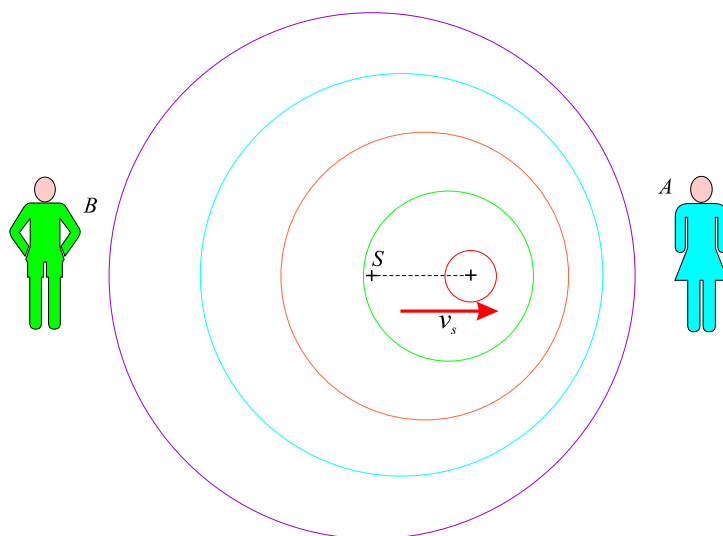
$$\nu' = \left(1 - \frac{v_p}{u}\right) \nu \quad (\text{posmatrač se kreće od izvora}). \quad (4.57)$$

Ove dve formule mogu da se objedine u jednu

$$\nu' = \left(1 \pm \frac{v_p}{u}\right) \nu, \quad (4.58)$$

gde se znak plus koristi kada se posmatrač kreće ka izvoru, a znak minus kada se kreće od njega.

Razmotrimo sada situaciju kada se izvor kreće direktno ka posmatraču A koji miruje. Sa slike 4.28 se vidi da će, talasni frontovi zvuka koji posmatrač A čuje, u tom slučaju biti bliži jedni drugima nego u slučaju kada je izvor u stanju mirovanja. Stoga je talasna dužina λ' koju meri (uz pomoć nekog



Slika 4.28: Izvor S se kreće brzinom v_s ka stacionarnom posmatraču A , odnosno od takodje stacionarnog posmatrača B .

instrumenta na primer) posmatrač A , kraća od talasne dužine izvora λ . U toku svake oscilacije, koja traje T , izvor, krećući se brzinom v_s , prelazi rastojanje $v_s T = v_s / \nu$, a talasna dužina koju meri posmatrač λ' je upravo jednaka razlici talasne dužine izvora λ i ovog iznosa

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_s}{\nu}.$$

Kako je $\lambda = u/\nu$, frekvencija zvuka koji čuje posmatrač A je

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - \frac{v_s}{\nu}} = \frac{u}{\frac{u}{\nu} - \frac{v_s}{\nu}},$$

odnosno

$$\nu' = \frac{1}{1 - \frac{v_s}{u}} \nu, \quad (4.59)$$

odakle se može zaključiti da je, frekvencija koju registruje posmatrač, veća od frekvencije talasa koje emituje izvor, kada se izvor kreće ka njemu.

Ako se izvor kreće od posmatrača (slučaj sa posmatračem B sa slike 4.28), posmatrač registruje veću talasnu dužinu λ' , od talasne dužine kojom izvor emituje talase, što znači da frekvencija koju posmatrač registruje *opada*, i iznosi

$$\nu' = \frac{1}{1 + \frac{v_s}{u}} \nu. \quad (4.60)$$

Kombinujući jednačine (4.59) i (4.60), opšti izraz koji opisuje vezu između registrovane i emitovane frekvencije, u slučaju kada se izvor kreće a posmatrač je u stanju mirovanja, je

$$\nu' = \frac{1}{1 \mp \frac{v_s}{u}} \nu, \quad (4.61)$$

gde se gornji znak odnosi na kretanje izvora ka posmatraču a donji na udaljavanje od njega.

Naravno, moguća je i najopštija situacija, u kojoj se i izvor i posmatrač kreću, a izraz za registrovanu frekvenciju, u tom slučaju, može da se napiše uzimanjem u obzir već dobijenih izraza:

$$\nu' = \frac{u \pm v_p}{u \mp v_s} \nu. \quad (4.62)$$

U ovom izrazu, gornji znaci ($+v_p$ i $-v_s$) odgovaraju situaciji kada se izvor i posmatrač približavaju jedan drugome, a donji znaci ($-v_p$ i $+v_s$) situaciji kada se međusobno udaljavaju. Na osnovu iznete analize je jasno da, uvek kada je reč o približavanju, raste frekvencija, a kada imamo slučaj da se izvor i posmatrač udaljavaju, frekvencija opada.²⁵

P r i m e r X. Ambulantna kola se kreću u smeru istoka brzinom 33,5 m/s, pri čemu sirena emituje zvuk frekvencije 400 Hz. Zvuk koje frekvencije će čuti osoba u kolima koja se, brzinom 24,6 m/s kreću na zapad kada se kola približavaju ambulatnim kolima, a koje kada se udaljavaju?

R e š e n j e. Potrebno je iskoristiti u oba slučaja jednačinu (4.62), uz činjenicu da je brzina zvuka 343 m/s. Kada se kola približavaju jedna

²⁵Iako je tipično iskustvo koje imamo sa Doplerovim efektom vezano za zvučne talase, reč je o fenomenu koji se javlja kod svih tipova talasa. Na primer, relativno kretanje izvora i posmatrača, dovodi do promene u registrovanoj frekvenciji i svetlosnih talasa. Doplerov efekat koriste policajci u radarskim sistemima kada mere brzinu kretanja vozila. Astronomi takodje koriste ovaj efekat da bi odredili brzine zvezda, galaksija, i drugih nebeskih tela u odnosu na Zemlju.

drugima, osoba u kolima će registrovati frekvenciju

$$\nu' = \frac{u + v_p}{u - v_s} \nu = \frac{343 \text{ m/s} + 24,6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 33,5 \text{ m/s}} 400 \text{ Hz} = 475 \text{ Hz}.$$

Kada se udaljavaju, tražena frekvencija je

$$\nu' = \frac{u - v_p}{u + v_s} \nu = \frac{343 \text{ m/s} - 24,6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + 33,5 \text{ m/s}} 400 \text{ Hz} = 338 \text{ Hz}.$$

Promena u registrovanoj frekvenciji je $475 - 338 = 137 \text{ Hz}$, odnosno više od 30% prave frekvencije.

4.7 Superpozicija talasa

Do sada je bilo reči o prostiranju jednog talasa kroz sredinu. Veoma je medjutim interesantno analizirati ponašanje sredine kada se nadje pod uticajem dva ili više talasa koji se prostiru kroz nju. Na primer, šta se dešava sa talasom na zategnutoj žici ili konopcu kada dodje do pričvršćenog kraja, odbije se, vrati nazad i sretne sa talasom suprotnog smera koji se i dalje protisire sa leva na desno? Kolike su i kako se menjaju sa vremenom promene u pritisku na jednom mestu u koncertnoj sali kada više instrumenata iz orkestra svira zajedno?

4.7.1 Superpozicija i interferencija sinusoidalnih talasa

Zamislimo da stojimo u bazenu u kome, nedaleko od nas, pluta gumena lopta. Recimo da sada, jednom rukom, neko vreme, pravimo talase koji će se od naše ruke, širiti koncentrično i koji će uskoro zahvatiti i deo vode na kome se nalazi lopte, pomerajući je gore-dole sa amplitudom od na primer 5 cm. Nakon smirivanja vodene površine, pravimo opet neko vreme jednake talase ali sada levom rukom. Primitićemo da će se lopta jednako ponašati kao i u prethodnom slučaju. Možemo da se zapitamo šta bi se desilo kada bi, obema rukama, istovremeno pravili talase? To će, naravno, zavistiti od toga kakva će biti faza talasa koji dolaze do lopte. Može da se desi na primer, da će oba talasa kada dodju do lopte imati tendenciju da je podignu na više, ili pak, drugi krajnji slučaj, da jedan ima tendenciju da loptu podigne a drugi da je spusti. Mogući su i drugi slučajevi koji se nalaze izmedju ova dva. Kako je čest slučaj da se u sredini postoje dva i više talasa, potrebno je razmotriti kako oni interaguju jedni sa drugima.

Princip superpozicije

Prema principu superpozicije, kada se kroz linearnu sredinu prostiru dva ili više talasa, rezultujuće pomeranje delića sredine (odnosno rezultujući talas) u ma kojoj tački sredine je jednako algebarskoj sumi pomeranja koje izazivaju individualni talasi. Posmatrajmo dva sinusoidalna talasa koji se prostiru kroz istu linearnu sredinu u istom pravcu i smeru. Ukoliko se oba prostiru sa leva na desno, imaju istu frekvenciju, talasnu dužinu i amplitudu, a razlikuju se u fazi, njihove talasne funkcije su

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t), \quad y_2 = A \sin(kx - \omega t + \varphi). \quad (4.63)$$

Rezultujuća talasna funkcija, prema principu superpozicije, je njihov zbir

$$y = y_1 + y_2 = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)]. \quad (4.64)$$

Koristeći formulu za zbir sinusnih funkcija

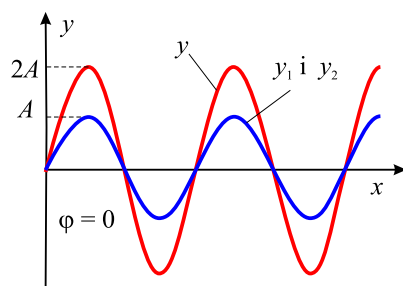
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

dobija se

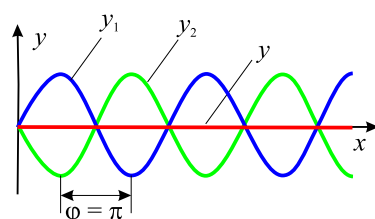
$$y = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (4.65)$$

Kao što se vidi iz ovog izraza, rezultujuća talasna funkcija y je takodje sinusoidalna i ima istu frekvenciju i talasnu dužinu kao individualni talasi. Amplituda rezultujućeg talasa je $2A \cos(\varphi/2)$, a početna faza $\varphi/2$. Ako je početna faza drugog talasa (4.63) (zapravo fazna razlika individualnih talasa) jednaka 0, tada je $\cos(\varphi/2) = \cos 0 = 1$, a amplituda rezultujućeg talasa je $2A$, odnosno jednaka je dvostrukoj amplitudi individualnih talasa. U tom slučaju se kaže da su talasi *u fazi* i da **interferiraju konstruktivno**. Bregovi i dolje individualnih talasa y_1 i y_2 se u tom slučaju nalaze na istim mestima i kao rezultat daju talas koji se od njih razlikuje jedino po tome što ima duplo veću amplitudu (slika 4.29). Pošto su individualni talasi u fazi, na slici se preklapaju. Konstruktivna interferencija će se javiti uvek kada je $\cos(\varphi/2) = \pm 1$, odnosno za $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, odnosno uvek kada je φ paran umnožak π .

Kada je φ jednako π rad ili bilo koji neparan umnožak π (odnosno breg jednog talasa se nalazi tamo gde je dolja drugog), tada je $\cos(\varphi/2) =$

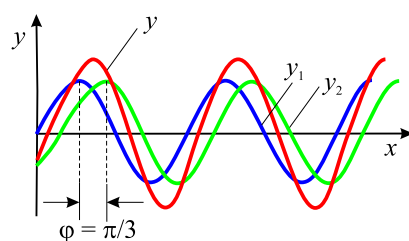


Slika 4.29: Konstruktivna interferencija dva identična progresivna talasa.

Slika 4.30: Destruktivna interferencija dva identična progresivna talasa koja se u fazi razlikuju za π rad.

$\cos(\pi/2) = 0$. Usled toga će rezultujući talas imati *nultu* amplitudu svuda (slika 4.30), odnosno imaćemo slučaj **destruktivne interferencije**.

Ukoliko pak fazna razlika talasa φ ima neku proizvoljnu vrednost izmedju 0 i π rad, rezultujuća amplituda ima odgovarajuću vrednost izmedju 0 i $2A$ (slika 4.31).

Slika 4.31: Interferencija dva identična progresivna talasa čija je fazna razlika izmedju 0 i π rad.

4.7.2 Stojeći talasi

Pretpostavimo da smo postavili dva identična zvučnika, koja emituju zvučne talase iste frekvencije i amplitude, na određeno međusobno rastojanje okrenute jednog prema drugome. U ovom slučaju imamo situaciju da dva identična talasa putuju u suprotnim smerovima kroz istu sredinu. Kad se susretnu oni će se kombinovati u skladu sa principom superpozicije.

Neka je reč o dva transverzalna sinusoidana talasa istih amplituda, frekvencija i talasnih dužina, ali suprotnih smerova, koji se kreću kroz istu sredinu

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad y_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t), \quad (4.66)$$

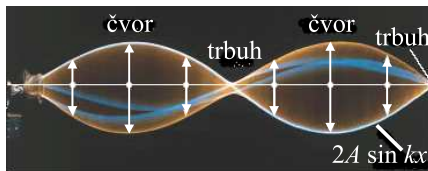
gde y_1 predstavlja talas koji se prostire sa leva na desno a y_2 talas koji se prostire sa desna na levo. Superponiranje ovih dveju funkcija daje

$$y = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]. \quad (4.67)$$

Prema pravilima za sabiranje trigonometrijskih funkcija rezultat je

$$y = 2A \sin(kx) \cos \omega t = A(x) \cos \omega t, \quad (4.68)$$

odnosno, dobijena je talasna funkcija koja opisuje takozvani *stojeći talas*.



Slika 4.32: Multiflex fotografija stojećeg talasa na žici.

Primetimo da dobijena talasna funkcija (4.68) ne sadrži kao argument $(kx - \omega t)$, pa prema tome ne predstavlja progresivni talas. Pažljivija analiza pokazuje da ova jednačina predstavlja zapravo jednačinu oscilovanja pri kome svaka čestica sredine osciluje istom frekvencijom ω (zbog faktora $\cos \omega t$ u jednačini). Međutim, amplitude čestica, $A(x) = 2A \sin(kx)$, se razlikuju i zavise od mesta na x osi na kome se nalaze.

Proizvoljna čestica sredine, zahvaćena stojećim talasom, osciluje tako da su njeni amplitudni položaji obuhvaćeni *obvojnicom* čija je jednačina $2A \sin(kx)$, gde x određuje položaj čestice u sredini. Ova situacija se kao što

vidimo razlikuje od one kod progresivnog talasa u kome sve čestice sredine prilikom oscilovanja imaju iste amplitude i frekvencije, pri čemu je amplituda oscilovanja jednaka amplitudi talasa.

Minimalna vrednost amplitude stojećeg talasa, inače jednaka 0, je u tačkama na x osi koje se nazivaju čvorovi, za koje važi $\sin kx = 0$, a to se dešava ako je

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Kako je $k = 2\pi/\lambda$, mesta čvorova su određena sa

$$x = \frac{n}{2}\lambda, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.69)$$

Amplituda stojećeg talasa je maskimalna u tačkama koje se nazivaju trbusi, u kojima je $\sin kx = \pm 1$, odnosno u kojima je

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

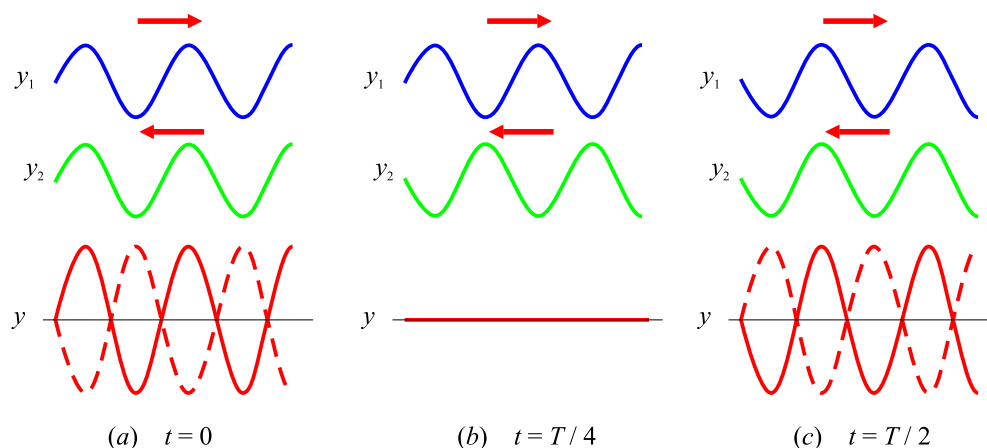
odnosno za

$$x = \frac{n}{4}\lambda, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.70)$$

Upoređivanjem jednačina (4.69) i (4.70), može da se zaključi da je:

- Rastojanje izmedju susednih trbuha $\lambda/2$.
- Rastojanje izmedju susednih čvorova $\lambda/2$.
- Rastojanje izmedju susednog čvora i trbuha $\lambda/4$.

Izgled stojećeg talasa koji se dobija od dva individualna progresivna talasa suprotnih smerova, u raznim momentima vremena je prikazan na slici 4.33. U $t = 0$ (deo (a) na slici), progresivni talasi su u fazi i izazivaju maksimalno pomeranje čestica sredine u stojećem talasu. Nako četvrtine perioda talasa (deo (b) na slici), svaki od progresivnih talasa se pomera za po četvrtinu talasne dužine pa su ova dva talasa u suprotnim fazama. Ovo znači da delići sredine, u tom momentu vremena, prolaze kroz ravnotežne položaje u oscilatornom kretanju koje vrše. U trenutku $t = T/2$ (deo (c) na slici), progresivni talasi su opet u fazi i produkuju elongacije delića sredine koje su inverzne u odnosu na one u $t = 0$. Na slici 4.33 su prikazana samo tri karakteristična slučaja dok se, ostali koji nisu prikazani, nalaze izmedju njih.



Slika 4.33: Oblik stojećeg talasa u raznim momentima vremena.

Energija stojećeg talasa

Veoma je interesantno analizirati energiju koju imaju čestice sredine u delu koji je zahvaćen stojećim talasom. Neka je, na primer, reč o stojećem talasu koji se formirao na zategnutoj žici. Osim čvorova koji su uvek stacionarni, svi delići žice osciluju istom frekvencijom ali različitim amplitudama koje zavise od mesta gde se nalaze.

U progresivnom talasu, energija se prenosi kroz sredinu, kao što je ranije diskutovano. Taj prenos energije talasom možemo da shvatimo kao rad koji jedan delić žice vrši na narednom. Kada se jedan delić pomera na više on deluje na susedni, pomera ga i na taj način vrši rad. Kada je reč o stojećem talasu, delić koji se nalazi u čvoru se ne pomera pa prema tome ne može da vrši rad na susednom deliću žice. Zaključujemo da kod stojećeg talasa ne postoji energija koja se prenosi kroz sredinu, jer kao što vidimo, kroz čvorove se ne prenosi energija. Iz tog razloga se ovaj tip talasa i naziva **stojeći talas**.

U stojećem talasu, energija oscilujuće žice se neprekidno transformiše izmedju elastične potencijalne energije (kada su delići žice u stacionarnim stanjima, tj. otklonjeni u odgovarajuće amplitudne položaje) i kinetičke energije (kada je žica horizontalna, odnosno kada delići maksimalnom brzinom prolaze kroz ravnotežne položaje). U medjuslučajevima delovi žice imaju i potencijalnu i kinetičku energiju.

P r i m e r X. Dva talasa suprotnih smerova formiraju stojeći talas.

Njihove talasne funkcije su

$$y_1 = (4,0 \text{ cm}) \sin(3,0x - 2,0t) \quad \text{i} \quad y_2 = (4,0 \text{ cm}) \sin(3,0x + 2,0t),$$

pri čemu su x i y izraženi u centimetrima. Odrediti (a) amplitudu oscilovanja delića sredine koji se nalazi na mestu sa koordinatom $x = 2,3 \text{ cm}$, (b) Odrediti položaje čvorova i trbuha, (c) Kolika je amplituda oscilovanja delova sredine koji se nalaze u trbusima?

R e š e n j e: (a) Kako je $A = 4,0 \text{ cm}$, $k = 3,0 \text{ rad/cm}$ i $\omega = 2,0 \text{ rad/s}$, jednačina stojećeg talasa je

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t = [(8,0 \text{ cm}) \sin 3,0x] \cos 2,0t,$$

odakle se vidi da se amplituda menja po zakonu

$$A(x) = 2A \sin kx = (8,0 \text{ cm}) \sin 3,0x.$$

Prema tome, tražena vrednost amplitude delića žice koji se nalazi na mestu određenom sa $x = 2,3 \text{ cm}$ je

$$A(2,3 \text{ cm}) = (8,0 \text{ cm}) \sin 6,9 \text{ rad} = 4,6 \text{ cm}.$$

(b) Položaji čvorova su određeni sa $x = n\lambda/2$, a talasna dužina je, iz $k = 3,0 \text{ rad/cm}$ i $k = 2\pi/\lambda$, $\lambda = 2\pi/3 \text{ cm}$. Prema tome, položaji čvorova su

$$x = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{\pi}{3} \text{ cm}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Trbusi se nalaze na $x = n\lambda/4$, odnosno

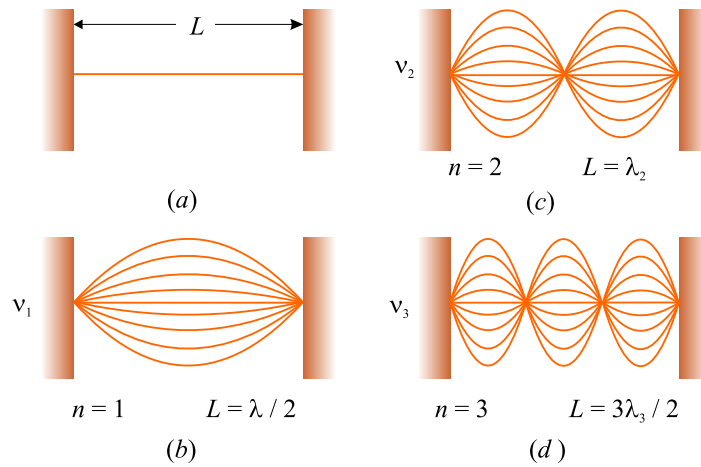
$$x = n\frac{\lambda}{4} = n\frac{\pi}{6} \text{ cm} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

(c) Amplituda čestice koja se nalazi trbuhu je

$$A(n\lambda/2) = 2A = 8,0 \text{ cm}.$$

4.7.3 Uslovi formiranja stojećeg talasa na žici čiji su krajevi fiksirani

Razmotrimo formiranje stojećih talasa na žici zategnutoj na oba kraja. Stojeći talas na žici će nastati kao neprekidna superpozicija talasa koji nailaze ka krajeve žice i onih koji se odbijaju od njih. Krajevi žice, obzirom da su učvršćeni,

Slika 4.34: Normalni modovi na zategnutoj žici dužine L .

imaju nultu elongaciju, i prema tome, po definiciji predstavljaju čvorove stojećeg talasa. Na žici može da se formira niz stojećih talasa, odnosno oscilacija koje se nazivaju **normalni modovi** a razlikuju se po frekvencijama koje se mogu relativno lako odrediti.

Oscilovanje zategnute žice je u stvari superpozicija određenih normalnih modova, a koji će od njih biti zastupljeni, zavisi od načina na koji je oscilovanje započelo.

Do oblika normalnih modova se dolazi polazeći od činjenica da na krajevima žica moraju da se formiraju čvorovi a da međusobna udaljenost susjednih čvorova i trbuha mora da bude jedna četvrtini talasne dužine. Prvi normalni mod prikazan na slici 4.34(b), ima čvorove na krajevima žice a trbuh na sredini. To je mod koji odgovara najvećoj talasnoj dužini λ_1 , koja je u tom slučaju duplo veća od dužine žice, $\lambda_1 = 2L$. Sledeći mod, talasne dužine λ_2 se javlja kada je talasna dužina jednaka dužini žice, $\lambda_2 = L$ (slika 4.34(c)). Treći mod, odgovara slučaju u kome je $\lambda_3 = 2L/3$. Možemo da zaključimo da se, na zategnutoj žici dužine L pričvršćenoj na oba kraja, mogu formirati normalni modovi čije su talasne dužine određene izrazom

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.71)$$

gde se indeks n odnosi na n -ti mod oscilovanja. Važno je istaći da su izrazom (4.71) određeni *moćni* modovi oscilovanja žice. Modovi koji će se *realizovati* zavise od načina na koji se žica, okidanjem, pobudjuje na oscilovanje.

Prirodne frekvencije pridružene odgovarajućim modovima se mogu dobiti iz relacije $\nu = u/\lambda$, gde je u brzina talasa (ista je za sve frekvencije jer, kao što je napomenuto, zavisi od sredine kroz koju se talas prostire). Na osnovu jednačine (4.71), za njih se dobija

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.72)$$

Kako je brzina prostiranja talasa kroz zategnutu žicu $u = \sqrt{F_z/\mu}$, prirodne frekvencije žice su

$$\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_z}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.73)$$

Najniža frekvencija ν_1 se naziva **osnovna (ili fundamentalna) frekvencija** i data je izrazom

$$\nu_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_z}{\mu}}, \quad (4.74)$$

a frekvencije ostalih normalnih modova su njeni celobrojni umnošci. Ovakve frekvencije, koje su celobrojni umnošci, formiraju **harmonijske serije**, a normalni modovi se zovu **harmonici**. Osnovna frekvencija ν_1 se, u tom smislu, zove frekvencija prvog harmonika, frekvencija $\nu_2 = 2\nu_1$ je frekvencija drugog harmonika, a frekvencija $\nu_n = n\nu_1$ je frekvencija n -tog harmonika.²⁶

Kako u realnosti da na zategnutoj žici pobudimo odgovarajuće harmonike? Tako što žicu pri okidanju deformišemo tako da njen oblik podseća na oblik željenog harmonika. Nakon otpuštanja, žica osciluje njegovom frekvencijom. Ukoliko je žica zategnuta tako da njen oblik ne podseća na neki određeni harmonik, rezultujuće oscilovanje uključuje više njih. To se dešava kada zatežemo žicu muzičkog instrumenta (gitara), prevlačimo gudačom po njoj (čelo) ili je udaramo (klavir). Ako se žica pri povlačenju deformiše u nesinusoidalni oblik, jedino talasi koji zadovoljavaju granične uslove (da čvorovi budu na mestima gde je žica učvršćena) mogu da se formiraju na njoj (i to su naravno harmonici).

Frekvencija žičanih instrumenata varira u zavisnosti od iznosa sile zatezanja i dužine žice (i naravno od njene debljine, odnosno od mase po jedinici

²⁶Oscilovanje zategnute žice, prilikom formiranja stojećeg talasa na njoj, je relativno prost slučaj u kojem su frekvencije modova celobrojni umnošci osnovne frekvencije, odnosno frekvencije prvog harmonika. Kod drugih sistema takodje postoje modovi oscilovanja ali ono obično nisu celobrojni umnošci osnovne frekvencije te tada ne možemo izdvojiti harmonike.

dužine). Na primer, zategnutost žica na gitari ili violini menjamo okretanjem čivija za štimovanje. Kada se zategnutost žice poveća rastu i frekvencije normalnih modova u skladu sa jednačinom (4.73). Kada se instrument (podešavanjem sile zatezanja žice) naštimuje, svirač proizvodi zvuke raznih frekvencija pomerajući prste duž njegovog vrata (pritiskajući žicu uz pragove instrumenta) čime skraćuje dužinu dela žice koji osciluje. Kada se smanji dužina žice, prema istoj relaciji, raste frekvencija normalnog moda.

P r i m e r X. Žica C na klaviru ima osnovnu frekvenciju od 262 Hz, a prva A žica iznad nje 440 Hz. (a) Izračunati frekvencije sledeća dva harmonika C žice. (b) Ako A i C žice imaju iste linijske gustine μ i iste dužine L , odrediti odnos sila zatezanja. (c) Pretpostavke navedene pod (b) da su linijske gustine i dužine žica jednake, u realnosti nisu potpuno tačne za klavir. Naime, dok linijske gustine jesu iste, dužina A žice iznosi 64% dužine žice C. Koliki je odnos njihovih sila zatezanja ako se to uzme u obzir?

R e š e n j e. (a) Frekvencije viših harmonika su celobrojni umnošci osnovne frekvencije $\nu_1 = 262$ Hz, odnosno

$$\nu_2 = 2\nu_1 = 524 \text{ Hz}, \quad \nu_3 = 3\nu_1 = 786 \text{ Hz}.$$

(b) Osnovne frekvencije žica su

$$\nu_{1A} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_{zA}}{\mu}}, \quad \nu_{1C} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_{zC}}{\mu}},$$

a njihov odnos

$$\frac{\nu_{1A}}{\nu_{1C}} = \sqrt{\frac{F_{zA}}{F_{zC}}}.$$

Iz njega se za odnos sila zatezanja dobija

$$\frac{F_{zA}}{F_{zC}} = \left(\frac{\nu_{1A}}{\nu_{1C}}\right)^2 = \left(\frac{440}{262}\right)^2 = 2,82.$$

(c) Na osnovu jednačine (4.74), odnos frekvencija je

$$\frac{\nu_{1A}}{\nu_{1C}} = \frac{L_C}{L_A} \sqrt{\frac{F_{zA}}{F_{zC}}} = \left(\frac{100}{64}\right) \sqrt{\frac{F_{zA}}{F_{zC}}},$$

odakle je traženi odnos

$$\frac{F_{zA}}{F_{zC}} = (0,64)^2 \left(\frac{440}{262}\right)^2 = 1,16.$$

P r i m e r X. Slobodni deo tanje žice E na gitari iznosi 64,0 cm i ima osnovnu frekvenciju 330 Hz. Ako je skratimo na prvom pragu, okidanjem proizvodi notu F frekvencije 350 Hz. Odrediti za koliko je skraćena žica.

R e š e n j e. Jednačina (4.72) povezuje osnovnu frekvenciju sa dužinom žice. Za $n = 1$ se za brzinu talasa na žici dobija

$$u = \frac{2L}{n} \nu_n = \frac{2(0,640 \text{ m})}{1} (330 \text{ Hz}) = 422 \text{ m/s}.$$

Kako se osim dužine žice neće menjati ništa, brzina talasa ostaje ista. Na osnovu relacije (4.72), može da se dobije i nova dužina žice za koju je osnovna frekvencija 350 Hz, odnosno

$$L = n \frac{u}{2\nu_n} = (1) \frac{422 \text{ m/s}}{2(350 \text{ Hz})} = 0,603 \text{ m}.$$

Razlika dužine neskraćene žice i žice skraćene na prvom pragu je prema tome 3,70 cm.

4.7.4 Stojeći talasi u vazдушnim stubovima

Stojeći talasi mogu da se formiraju i u vazдушnim stubovima, na primer u cevima orgulja, kao rezultat interferencije longitudinalnih talasa koji se prostiru u suprotnim smerovima. U kakvoj međusobnoj fazi će biti incidentni i reflektovani talas zavisi od toga da li je kraj cevi otvoren ili zatvoren.²⁷

Ako je cev zatvorena na kraju, tu se nalazi čvor longitudinalnog talasa, obzirom da zid na kraju cevi ne dozvoljava longitudinalno pomeranje delića vazduha. Kao rezultat, reflektovani talas doživljava promenu u fazi od 180° , odnosno u kontrafazi je sa incidentnim talasom. Kako je talas pritiska pomećen u fazi za $\pi/2$ u odnosu na talas pomeranja čestica vazduha, na zatvorenom kraju cevi se nalazi trbuh talasa pritiska (tačka maksimalne varijacije pritiska).

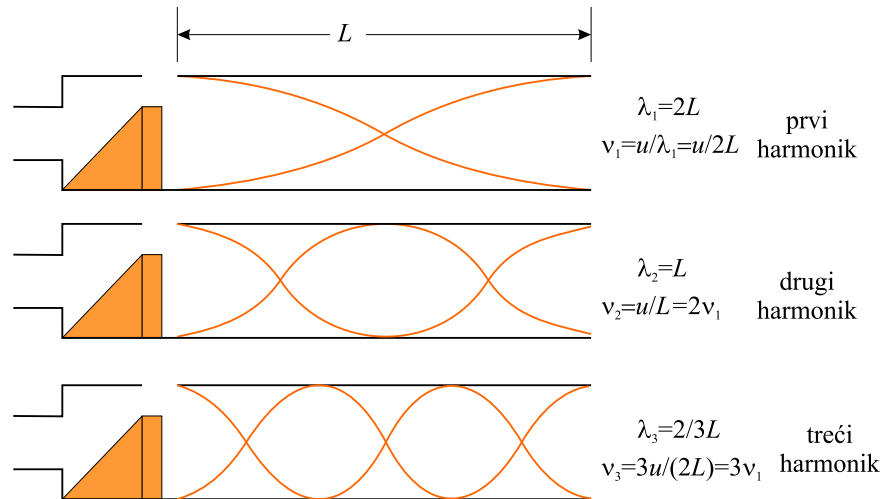
Otvoreni kraj cevi približno odgovara trbuhu talasa pomeraja, odnosno čvoru talasa pritiska.²⁸ Potpuno je jasno zašto na kraju otvorene cevi nema

²⁷Ova veza je analogna vezi između faza incidentnih i reflektovanih transverzalnih talasa na žici, kada se odbijaju o kraj žice koji može biti fiksiran ili slobodan.

²⁸Strogo govoreći otvoreni kraj cevi sa vazduhom nije trbuh stojećeg talasa. Deo vazdušnog stuba u kome je postignuta veća koncentracija čestica gasa neće se odbiti o sam kraj cevi već će se to desiti kada ga prodje. Za cevi sa tankim zidovima, kružnog

varijacije pritiska (čvor); to je zato što se na kraju cevi, otvorenom prema atmosferi, održava atmosferski pritisak.

Može da nam se učini čudnim tvrdjenje da se zvučni talas odbija o otvoreni kraj cevi, jer na tom mestu nema prekida sredine kroz koju se on prostirao, niti prelaska na neku drugu sredinu. Ovo tvrdjenje je sasvim tačno. Prisetimo se da je zvučni talas u cevi, u stvari talas pritiska koji se prilikom prostiranja unutar cevi ograničen njenim zidovima. Kada dodje do kraja cevi, tog ograničenja više nema, i komprimovani vazduh može slobodno da se širi u atmosferu. Dakle, nije reč o promeni sredine, već o promeni karaktera sredine, unutar i izvan cevi. Ta promena je međjutim, dovoljna da bi se stvorili uslovi za refleksiju.



Slika 4.35: Cev otvorena na oba kraja.

Prva tri normalna moda oscilovanja u cevi otvorenoj na oba kraja su prikazani na slici 4.35. Kada se struja vazduha usmeri kroz otvor cevi na levom kraju i naidje na prepreku, formira se longitudinalni stojeći talas i cev ociluje njenom normalnom frekvencijom. Svi normalni modovi se pobudjuju istovremeno (mada ne sa istom amplitudom). Trbusi talasa se nalaze (približno) na krajevima cevi. U prvom normalnom modu, stojeći talas se nalazi izmedju dva susedna trbuha koji su na rastojanju polovine talasne

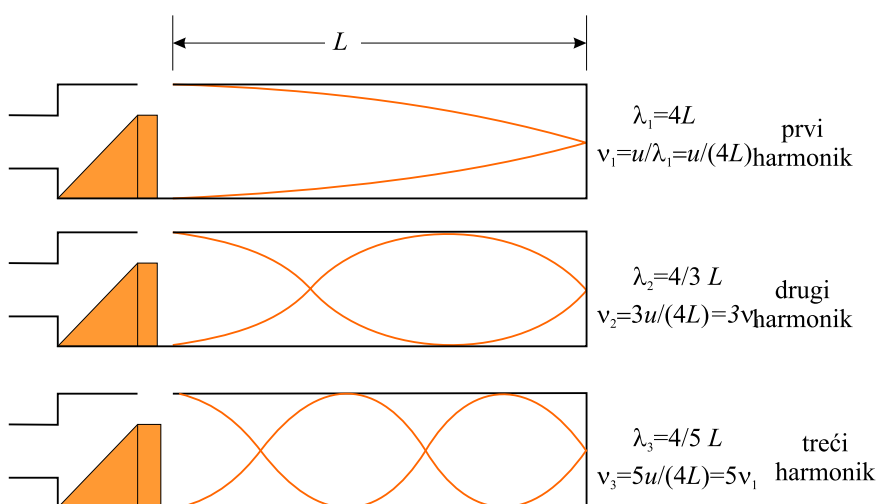
poprečnog preseka, talas se odbija na rastojanju $0,6R$, gde je R poluprečnik cevi. Usled toga je, efektivna dužina cevi veća od geomerijske dužine L , međjutim obično se ova razlika zanemaruje.

dužine. Prema tome, talasna dužina je duplo veća od dužine cevi, dok je osnovna frekvencija $\nu_1 = u/(2L)$. Kao što se vidi sa slike 4.35, frekvencije viših harmonika su $2\nu_1, 3\nu_1, \dots$. Može da se zaključi da se u *cevi otvorenoj na oba kraja, prirodne frekvencije oscilovanja formiraju harmonijsku seriju koja uključuje celobrojne umnoške osnovne frekvencije*.

Pošto postoje svi harmonici, i pošto je osnovna frekvencija data istim izrazom kao za žicu (4.72), prirodne frekvencije oscilovanja možemo da zapišemo kao

$$\nu_n = n \frac{u}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.75)$$

gde je u naravno brzina zvuka u vazduhu.



Slika 4.36: Cev otvorena na jednom a zatvorena na drugom kraju.

Ako je cev otvorena na jednom, a zatvorena na drugom kraju, zatvoreni kraj će biti mesto na kome će se formirati čvor stojećeg talasa kada je reč o pomeranjima delića sredine. U tom slučaju stojeći talas koji odgovara fundamentalnom ili osnovnom modu počinje trbuhom (na otvorenom kraju cevi) i završava se u prvom narednom čvoru (na zatvorenom kraju cevi), koji se nalazi rastojanju od jedne četvrtine talasne dužine. Na osnovu toga zaključujemo da je talasna dužina prvog normalnog moda jednaka $4L$ a da je fundamentalna frekvencija $\nu_1 = u/(4L)$. Na slici 4.36 su prikazani viši modovi, odnosno harmonici, čije frekvencije su $3\nu_1, 5\nu_1, \dots$, tako da može da se kaže da *u cevi sa jednim otvorenim i jednim zatvorenim krajem, prirodne frekvencije oscilovanja čine harmonijsku seriju koja se sastoji samo*

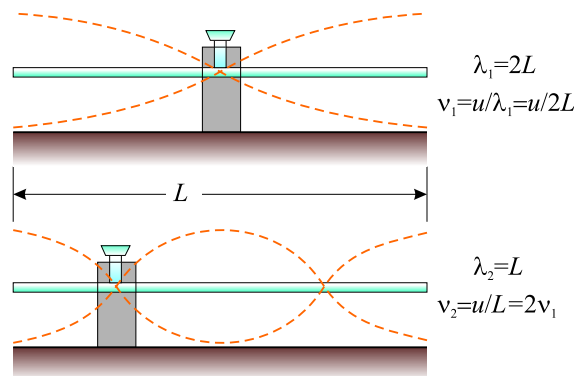
od neparnih celih umnožaka fundamentalne frekvencije. To može da se zapiše kao

$$\nu_n = n \frac{u}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.76)$$

Interesantno je analizirati šta se dešava sa frekvencijama žičanih i instrumentata sa vazдушnim stubovima (duvačkih) u toku koncerta kada temperatura sredine poraste. Zvuk koji emituje flauta, na primer, postaje viši (raste frekvencija) sa povećanjem temperature, jer brzina zvuka u vazduhu raste sa temperaturom što izaziva i povećanje frekvencije (4.75). Sa druge strane, zvuk violine postaje niži jer se usled povećanja temperature žice izdužuju čime opada sila zatezanja, a time i brzina zvuka koji se prostire kroz njih.

4.7.5 Stojeći talasi u šipkama i na pločama

Stojeći talasi mogu da nastanu i u šipkama i na pločama. Na primer štap učvršćen u sredini i udaren u čelo (u smeru ose štapa) štapa osciluje na longitudinalan način, kao što je to prikazano na slici 4.37. Isprekidane linije



Slika 4.37: Normalni modovi oscilovanja štapa dužine L .

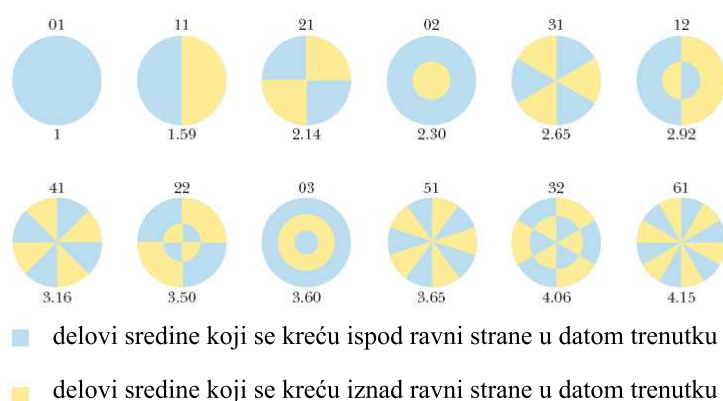
na ovoj slici reprezentuju longitudinalna pomeranja delova štapa. Ona su radi jasnoće nacrtana transverzalno, kao što je to uradjeno i kod talasa u vazдушnom stubu. Na sredini štapa se nalazi čvor talasa jer je na tom mestu on učvršćen, dok se na krajevima, budući da su slobodni, nalaze trbusi.²⁹ Isprekidane linije na prvom delu slike predstavljaju prvi normalni mod oscilovanja čija je talasna dužina $\lambda_1 = 2L$ a frekvencija $\nu_1 = u/(2L)$, gde je

²⁹Osilacije koje se na ovaj način stvaraju u štapu su očigledno analogne onima u cevi otvorenoj na oba kraja.

u brzina longitudinalnog talasa u šipci. Drugi normalni modovi mogu da se pobude ako se šipka pričvrsti na drugim mestima. Na primer, drugi normalni mod se pobudjuje ako se šipka pričvrsti na $L/4$ od jednog kraja (drugi deo slike 4.37).

Stojeći talasi mogu da nastanu i u dvodimenzionalnim sredinama, kao što su na primer, elastične membrane rastegnute preko kružnih okvira (kod bubnjeva). Kada se takva membrana udari na nekom mestu, nastaju talasi koji se šire kroz nju, dolaze do pričvršćenih rubova i reflektuju o njih više puta. Rezultujući zvuk nije harmonijski jer, oscilujuća membrana i šupalj prostor ispod nje zajedno, produkuju skup stojećih talasa čije frekvencije nisu umnošci neke osnovne frekvencije. Budući da ne postoje takve proste veze medju formiranim stojećim talasima, nastali zvuk je ispravnije nazvati šumom.

Neki mogući normalni modovi oscilovanja dvodimenzionalne kružne membrane su pokazani na slici 4.38.



Slika 4.38: Neki mogući normalni modovi na kružno zategnutoj membrani. Par brojeva iznad svake sličice označava broj radijalnih i cirkularnih čvorova. Ispod svake sličice se nalazi broj koji pokazuje koliki multipl je dati mod od 01 moda.

Kod jednodimenzionalnih stojećih talasa čvorovi su, kao što smo videli, tačke u kojima nema pomeranja delića sredine. U slučaju dvodimenzionalne sredine, na primer zategnute membrane, reč je o (krivim) linijama duž kojih se ne pomeraju delići sredine. Najniži normalni mod, frekvencije ν_1 , ima samo jednu čvornu liniju i ona se nalazi na obruču na koji je nategnuta membrana. Drugi mogući normalni modovi imaju dodatne čvorišne linije

koje su ili krugovi ili prave linije prikazane na slici 4.38.

4.8 Maksvelove jednačine i elektromagnetni talasi

Slično Njutnovim jednačinama dinamike, u oblasti elektromagnetizma postoje Maksvelove³⁰ jednačine, koje predstavljaju osnovne zakone elektriciteta i magnetizma. Ima ih ukupno četiri a u cilju jednostavnosti napisaćemo ih za vakuum, odnosno u slučaju odsustva dielektričnih i magnetnih materijala.

Prve dve imaju sličan oblik

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (4.77)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (4.78)$$

(kružić na integralu znači da se integracija vrši po zatvorenoj površi) i u stvari predstavljaju Gausov zakon za električno i magnetno polje. Druge dve predstavljaju Faradejev i Amper-Maksvelov zakon, odnosno imaju oblik

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (4.79)$$

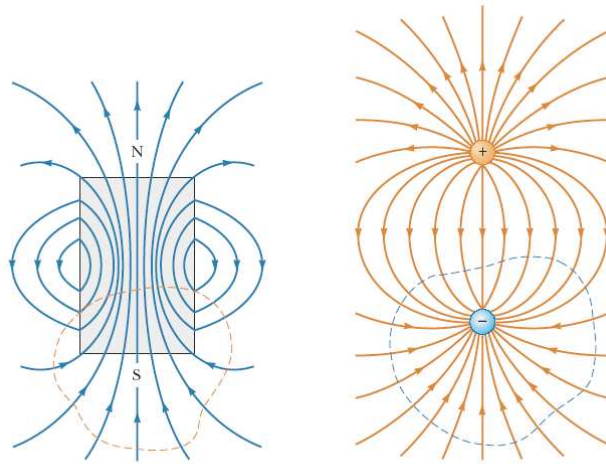
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (4.80)$$

Jednačina (4.77) je Gausov zakon: **Ukupni fluks električnog polja kroz bilo koju zatvorenu površ jednak je ukupnom naelektrisanju koje ona obuhvata podeljenom sa ϵ_0 .** On u stvari predstavlja vezu električnog polja i naelektrisanja koja ga kreiraju.

Jednačina (4.78) može da se shvati kao Gausova jednačina za magnetno polje jer je prema njoj **fluks magnetnog polja kroz zatvorenu površ jednak nuli.** Drugim rečima, broj linija magnetnog polja koje udju u deo sredine oivičen nekom zatvorenim površi, mora da bude jednak broju linija polja koje izlaze iz tog dela sredine. To ukazuje na činjenicu da magnetno polja, za razliku od električnog, nema ni izvore ni ponore (slika 4.39).³¹

³⁰James Clerk Maxwell, ...

³¹Razlog je u tome što ne postoje magnetni monopoli koji bi mogli da budu izvori ili ponori polja, kao što je to slučaj sa naelektrisanjima.



Slika 4.39: Linije magnetnog i električnog polja.

Jednačina (4.79) je, u stvari, Faradejev zakon indukcije, koji opisuje stvaranje električnog polja promenom fluksa magnetnog polja. Prema ovom zakonu, **elektromotorna sila koja je u stvari integral električnog polja po zatvorenoj konturi, je jednaka, brzini promene fluksa magnetnog polja kroz bilo koju površ koja je ograničena pomenutom zatvorenom konturom.**

Jednačina (4.80) je uopštenje Amperovog zakona, koji opisuje stvaranje magnetnog polja električnim poljem i električnom strujom: **Integral magnetnog polja po zatvorenoj konturi je jednak zbiru proizvoda μ_0 i ukupne struje koja je obuhvaćena konturom i proizvoda $\varepsilon_0\mu_0$ i brzine promene fluksa električnog polja, kroz bilo koju površ ograničenu datom konturom.**

Ukoliko poznajemo električno i magnetno polje u nekoj tački prostora, sila kojom ona deluju na česticu neelektrisanja q , može da se izračuna iz izraza

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.81)$$

koji predstavlja takozvanu Lorencovu silu.

Maksvelove jednačine, zajedno sa izrazom za silu, u potpunosti opisuju sve klasične elektromagnetne pojave.

4.8.1 Elektromagnenti talasi

Kompletan matematički tretman Maksvelovih jednačina koji dovodi do odgovarajuće talasne jednačine nadilazi nivo dosadašnjeg izlaganja pa i neće biti prezentovan ovde. Do odgovarajuće jednačine se ipak može doći uz neke pretpostavke koje neće izmeniti suštinu pojave.

Pretpostavimo da u prostoru postoji elektromagnetni (EM) talas koji se prostire u pozitivnom smeru x ose (to je smer prostiranja EM talasa). U tom talasu, električno polje \vec{E} je duž y ose, dok je magnetno polje \vec{B} duž z ose.³² Pretpostavimo da u svakoj tački prostora, intenziteti električnog E i magnetnog polja B zavise samo od x i t , a ne i od y i od z koordinata. Ovakvi talasi se nazivaju *ravni talasi*, jer je površ koja povezuje tačke koje su u istoj fazi, odnosno talasni front, **ravan**.

Vrednosti električnog i magnetnog polja, E i B , mogu da se povežu jedna sa drugom preko jednačina (4.79) i (4.80). U praznom prostoru, u kome je $Q = 0$ i $I = 0$, jednačina (4.79) ostaje nepromenjena, dok jednačina (4.80) poprima oblik

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (4.82)$$

Na osnovu ovih jednačina, uzimajući u obzir da je reč o ravnim talasima, dobija se diferencijalna jednačina koja povezuje E i B (namerno su izostavljeni indeksi y i z)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (4.84)$$

S obzirom na to da i jedno i drugo polje zavise od dve promenljive, izvodi su parcijalni.³³ Uzimajući izvod po x jednačine (4.83) i kombinujući dobijeni izraza sa (4.84), dobijamo

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right), \quad (4.85)$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (4.86)$$

³²Talasi kod kojih su električno i magnetno polje paralelni paru uzajamno normalnih osa se nazivaju **linearno polarizovani talasi**.

³³Podsetimo se da to ne znači ništa drugo do da, kada odredjujemo izvod $\partial B/\partial x$, t smatramo konstantnim, i obrnuto.

4.8. MAKSVELOVE JEDNAČINE I ELEKTROMAGNETNI TALASI 223

Na sličan način, uzimajući izvod jednačine (4.84) po x i kombinujući rezultat sa jednačinom (4.83), dobija se

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \quad (4.87)$$

I jednačina (4.86) i jednačina (4.87) imaju oblik opšte talasne jednačine, sa brzinom talasa

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (4.88)$$

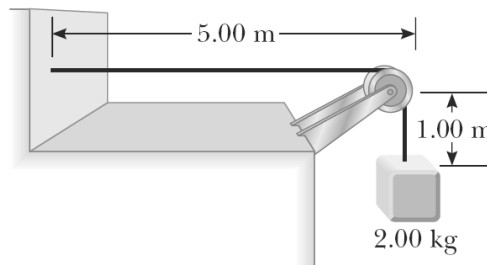
Uzimajući da je $\varepsilon_0 = 8,85419 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$, i $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}$, za brzinu se dobija $u = 2,99792 \times 10^8 \text{ m/s}$. Kako je brzina EM talasa u vakuumu, u stvari jednaka brzini svetlosti u vakuumu, dolazimo do zaključka da je svetlost u stvari elektromagnetni talas.

4.9 Primeri i zadaci

1. Odrediti brzinu longitudinalnih talasa u vazduhu (smatrati ga idealnim gasom sa 5 stepeni slobode) na sobnoj temeperaturi ($T = 290 \text{ K}$). Kolika je brzina ovih talasa na $t = 0$ a kolika na 40 stepeni Celzijusa.

◇

2. Teg mase 2 kg okačen je o jedan kraj užeta mase 300 g i dužine 6 m (slika). Izračunati brzinu transversalnih talasa kroz uže i vreme za koje će talas stići od zida do kotura. Talas se proizvodi kratkotrajnim delovanjem sile normalno na uže.



Slika 4.40:

◇

3. Za linijske talase koji potiču iz harmonijskog izvora i prostiru se kroz sredinu koja ih ne apsorbuje dobiti jednačinu koja povezuje $\frac{d^2y}{dt^2}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$

◇

4. Talas u obliku pulsa koji se kreće u pozitivnom smeru x ose se može opisati jednačinom

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}$$

gde su x i y izraženi u santimetrima a t u sekundama. Nacrtaj talasnu funkciju u $t = 0$, $t = 1$ i $t = 2$ s. Kolika je brzina ovog talasnog pulsa?

◇

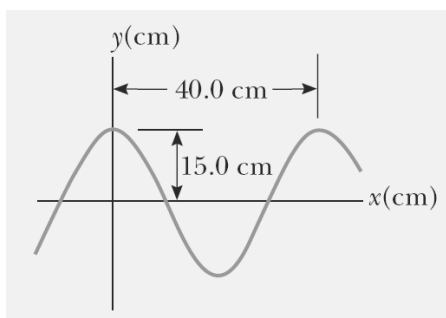
5. Talasna funkcija je oblika

$$y(x, t) = \frac{2}{(x + 3t)^2 + 1}$$

gde su x i y izraženi u santimetrima a t u sekundama. Nacrtaj je za $t = 0$, $t = 1$ i $t = 2$ s. Kolika je brzina ovog talasnog pulsa i kakav je smer njegovog kretanja?

◇

6. Na slici je prikazan sinusoidalni talas kod koga vertikalno pomeranje sredine u $t = 0$ s i $x = 0$ m iznosi 15 cm. Odredi talasni broj, period, ugaonu učestanost i brzinu talasa. Napiži jednačinu koja opisuje ovakvo talasno kretanje u sinusnom i kosinusnom obliku.



Slika 4.41:

◇

7. Za talas sa prethodne slike odrediti: talasni broj, period, kružnu frekvenciju i brzinu talasa. Odrediti početnu fazu φ , i napisati izraza za talasnu funkciju.

8. Od izvora talasa, kroz elastičnu sredinu se prostiru transverzalni talasi amplitude $y_0 = 0,5$ cm. Njihova talasna dužina je $\lambda = 15$ cm. Izračunati elongaciju tačke koja je udaljena $x = 20$ cm od izvora talasa a u trenutku kada je on izvršio jednu punu oscilaciju, računajući od trenutka kada je počelo prostiranje talasa.
9. Transverzalni talas se prostire duž zategnute elastične žice brzinom $u = 15$ m/s, pri čemu je period oscilovanja neke tačke na žici $T = 1,2$ s a amplituda oscilovanja $y_0 = 2$ cm. Izračunati
 - kolika je faza Φ , elongacija y , brzina v i ubrzanje a tačke koja se nalazi na rastojanju $x = 45$ cm od izvora talasa a po isteku vremena od $t = 4$ s od trenutka kada je započeto kretanje talasa od talasnog izvora.
 - kolika je razlika u fazi $\Delta\Phi$ dveju tačaka na žici koje se nalaze na rastojanju $x_1 = 30$ cm i $x_2 = 20$ cm od izvora talasa.
10. Brzina zvuka kroz neki metal iznosi $u = 2600$ m/s. Od kog materijala je napravljena žica dužine $l = 1$ m i poprečnog preseka površine $S = 1$ mm²? Kada se optereti tegom ova žica se istegne za $\Delta l = 0,5$ mm.
11. Na rastojanju $s = 500$ m pucanj se čuje $t = 1,47$ s nakon bleska eksplozije. Odrediti pritisak vazduha u mmHg. Gustina vazduha na tom pritisku je $\rho = 1,22$ kg/m³, gustina žive je $\rho_{Hg} = 13,6 \cdot 10^3$ kg/m³, dok je za vazduh odnos specifičnih toplotnih kapaciteta pri stalnom pritisku i zapremini 1,40.
12. Sinusni talas, koji putuje duž zategnute žice u pozitivnom smeru x ose, ima amplitudu 15 cm, talasnu dužinu 40 cm i frekvenciju 8 Hz. U trenutku $t = 0$ delić žice sa koordinatom $x = 0$ ima elongaciju 15 cm. Odrediti talasni broj, period, ugaonu frekvenciju i brzinu talasa. Napisati jednačinu ovog talasa.
13. Metalni štap dužine L uklješten je u tačkama koje su na rastojanju $L/4$ od krajeva i pobudjen je da osciljuje. Odrediti frekvencije prvih pet harmonika. Brzina talas kroz štap je 5500 m/s a njegova dužina 1m.
14. Transverzalni talas u žici je opisan jednačinom $y = 0,12 \sin \pi(\frac{1}{8}x + 4t)$ m. Odrediti brzinu i ubrzanje tačke na žici koja se nalazi na rastojanju $x = 1,6$ m u trenutku $t = 0,2$ s.

15. Materijalna tačka slobodno pada u homogeno gravitacionom polju. Polazeći od jednačine kretanja odrediti zavisnost položaja materijalne tačke od impulsa. Skicirati dobijenu zavisnost.
16. Za telo mase m koje linearno harmonijski osciluje, polazeći od jednačine kretanja odrediti zavisnost koordinate i impulsa. Skicirati dobijenu zavisnost.

