# Glava 5

# Analitička mehanika

Njutnova mehanika je kompletna, logički konzistentna teorija, koja veoma dobro opisuje širok dijapazon pojava. Na osnovu nje može da se upravlja svemirskim brodom koji putuje na Neptun (do prosle godine bi ovde naveli putovanje na Pluton, medjutim pošto on dekretom više nije planeta, nećemo ni razmišljati o putovanju na njega) ili da se izračuna kretanje bilo kog objekta na Zemlji koji je dovoljno veliki da može da se vidi običnim mikroskopom i koji je dovoljno spor (nekoliko hiljada puta brži od brzine metka).

Bez obzira na ovako veliku primenu Njutnove mehanike, ispostavilo se da njena osnovna forma nije dovoljno univerzalna a u slučaju kada želimo da iz nje predjemo na teorije koje opisuju mikrosvet se ispostavilo da nije sasvim pogodna. Pogodnija je druga varijanta klasične mehanike koja se naziva Lagranževa ili analitička mehanika.[1]

U razvoju klasične mehanike se, u tom smislu, mogu izdvojiti dva pravca. Jedan od njih je dobro poznata Njutnova[2] ili vektorska mehanika a drugi je poznat pod nazivom analitička mehanika.[3] U Njutnovoj mehanici se za dobijanje diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanja tela koriste dva vektora: vektor impulsa i sila. Osnivač analitičke mehanike Lajbnic[4] tvrdio je da u

[1]Pojam "analitička" označava da je reč o primeni diferencijalnog računa koji su fomrulisali Njutn i Lajbnic pri kraju 17. veka, u mehanici.

[2]Njutnova mehanika se može ukratko prikazati kao "primeni sile na tela i vidi kako će da se kreću"

[3]U ovom prilazu, umesto da se analiziraju sile koje deluju na telo centralno mesto zauzima energija tela. Ovakav pristup iako izgleda samo kao alternativa Njutnovom, upršćava analizu mnogih, u Njutnovoj mehanici, komplikovanih problema, npr. oscilovanja kompleksnih sistema, talase u neprekidnim sredinama, kretanje po orbitama, ...

[4]G.W. Leibniz, 1646-1716.

osnovu mehanike ulaze dve skalarne veličine: energija i rad.

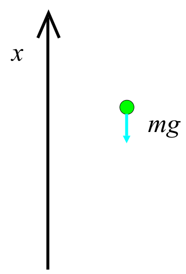
I vektorska i analitička mehanika se mogu koristiti za proučavanje istih problema. I jedna i druga daju istovetene rezultate[5]. Iako na prvi pogled može da se učini da je reč o primeni samo malo drugačijeg matematičkog formalnizma u proučavanju istih pojava pokazalo se da su osnovni prinicipi analitičke mehanike toliko duboki da se smatraju jednim od najvećih dostignuća u proučavanju fenomena prirode. Kao posledica te činjenice, iz mehanike, gde je ovaj koncept nastao, proširen je na mnoge oblasti fizike i tehnike.

## 5.1 Elementi analitičke mehanike

Kao što je dobro poznato u Njutnovoj mehanici kretanje čestice je zadato jednačinom

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{5.1}$$

gde je $\vec{p} = m\vec{v}$ impuls čestice, a $\vec{F}$ ukupna sila koja deluje na posmatranu česticu.




Slika 5.1: Slobodan pad tela mase $m$.

Razmotrimo kao primer slobodan pad čestice mase $m$ u homogenom polju Zemljine teže. Kako se kretanje tela odvija u jednoj dimenziji, Njutnova jednačina (5.1) projektovana na pravac kretanja daje

$$\frac{dp}{dt} = -mg. \tag{5.2}$$

Obzirom na to da je impuls tela $p = mv = m\dot{x}$, levu stranu ove jednakosti možemo pisati kao

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} \tag{5.3}$$

[5]Procesi u prirodi su nezavisni od načina na koji ih opisujemo.

na osnovu čega jednačinu (5.2) možemo pisati kao

$$m\ddot{x} + mg = 0. \tag{5.4}$$

Kako je kinetička energija $T = \frac{1}{2}mv^2 == \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, član koji sadrži brzinu u poslednjem izrazu može da se dobije ako se uradi sledeći niz izvoda kinetičke energije

$$\frac{dT}{d\dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) = m\ddot{x}. \tag{5.5}$$

Sa druge strane, kako je potencijalna energija u gravitacionom polju $U = mgx$, njen izvod po prostornoj koordinati $x$ je

$$\frac{dU}{dx} = mg \tag{5.6}$$

pa izraz (5.4) može da se zapiše kao

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) + \frac{dU}{dx} = 0. \tag{5.7}$$

Kao naredni primer razmotrimo kretanje linearnog harmonijskog oscilator mase $m$. Njutnova jednačina koja opisuje njegovo kretanje je

$$\frac{dp}{dt} = -kx, \tag{5.8}$$

odnosno

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{5.9}$$

Za kinetičku energiju važi ista jednačina (5.5), dok je prvi izvod potencijalne energije oscilatora, $U(x) = kx^2/2$, po prostornoj koordinati $x$ jednak

$$\frac{dU}{dx} = kx. \tag{5.10}$$

Na osnovu ovoga Njutnova jednačina postaje

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dv}\right) + \frac{dU}{dx} = 0. \tag{5.11}$$

odnosno ima istu formu kao i u slučaju opisivanja kretanja čestice koja slobodno pada u gravitacionom polju.

## 5.2 Ojler-Lagranževe jednačine

Dublja analiza pokazuje da je moguće definisati funkciju oblika

$$L = T - U \tag{5.12}$$

koja se naziva Lagranževom,[6] iz koje se mogu dobiti diferencijalne jednačine kretanja koje opisuju kretanje nekog sistema.

Te jednačine se nazivaju Ojler-Lagranževim i imaju oblik

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) - \frac{dL}{dx} = 0. \tag{5.13}$$

Kao što je lako videti iz prethodnih primera Lagranževa funkcija za česticu u gravitacionom polju je

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mgx, \tag{5.14}$$

dok je za oscilator

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \tag{5.15}$$

Pomoću Lagranževe funkcije se može definisati jedna veoma važna funkcija koja se naziva dejstvo

$$S = \int L dt. \tag{5.16}$$

Primer 1. Pokazati da Lagranževa funkcija za linearni harmonijski oscilator koji se kreće u otpornoj sredini ima oblik

$$L = \frac{1}{2} m e^{2\beta t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$$

## 5.3 Fazni prostor

Takozvani fazni prostor je prostor koji je kombinacija konfiguracionog prostora (prostor koji čine mogući položaji čestica) i prostora mogućih vrednosti impulsa čestica. Ako je reč o jednoj čestici koja se kreće u tri dimenzije, tada su i konfiguracioni i impulsni prostor Dekartovi trodimenzionalni sa koordinatama $(x, y, z)$ odnosno $(p_x, p_y, p_z)$ a fazni je šestodimenzionalni sa kooridantama $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$. To je zapravo prostor **dinamičkih stanja**

[6] Žozef Lagranž (1736-1813) je bio veliki francuski matematičar i mehaničar.

sistema, jer ako znamo gde se on nalazi i koliki mu je impuls u datom trentku onda mu poznajemo dinamičko stanje.

Tokom evolucije sistema, tj. sa odvijanjem vremena, sistem menja stanje pa i odgovarajuća tačka u faznom prostoru kojom smo ga predstavili, menja svoju poziciji i opisuje **faznu trajektoriju**. Ovu trajektoriju je nemoguće nacrtati kada se sistem kreće u više od jedne dimenzije. Ukoliko se sistem kreće samo duž jedne ose (na primer $x$), to jest ako ima samo jedna stepen slobode, fazni prostor u kome prikazujemo njegova dinamička stanja je dvodimenzionalan jer ga osim prostorne kooridnate $x$ čini još i odgovarajuć impuls. U tom slučaju je moguće nacrtati odgovarajuću faznu trajektoriju.

Primer: Odrediti faznu trajektoriju linearnog harmonijskog oscilatora.

Da bi odredili faznu trajektoriju potrebno je da nadjemo vezu $x$ koordinate i odgovarjaućeg impulsa oscilatora. Iz jednačine kretanja

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

se dobija da je elongacija

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Na osnovu ovoga je impuls

$$p(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega A\sin(\omega t + \varphi).$$

Veza konfiguracione koordinate i impulsa se može dobiti eliminacijom vremena iz dve poslednje jednačine. To je najlakše uraditi ako drugu jednačinu zapišemo u obliku

$$\frac{p}{m\omega} = -A\sin(\omega t + \varphi)$$

kvadriramo je i saberemo sa kvadratom prve. Dobija se

$$x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} = A^2$$

što nakon množenja sa $\frac{1}{2}m\omega^2$ daje

$$\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \tag{5.17}$$

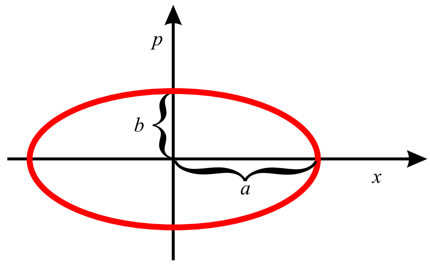
Kako izraz na desnoj stani predstavlja ukupnu mehaničku energiju oscilatora $E$, jednačina fazne trajektorije postaje

$$\frac{x^2}{2E/(m\omega^2)} + \frac{p^2}{2mE} = 1. \tag{5.18}$$

Ako ovu jednačinu uporedimo sa jednačinom elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gde su $a$ i $b$ takozvane poluose elipse, možemo da zaključimo da je fazna trajektorija linearnog harmonijskog oscilatora ustvari elipsa koja ima poluose $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ i $b = \sqrt{2mE}$.




Slika 5.2: Fazna trajektorija linearnog harmonijskog oscilatora.

Pazljivom čitaocu verovatno nije promaklo da jednačina fazne trajektorije (5.17) ustvari predstavlja zakon održanja mehaničke energije napisan za linearni harmonijski oscilator. Zaključak je univerzalniji i upućuje na činjenicu da je jednačine faznih trajektorija relativno lako dobiti iz zakona održanja energije.

Primer. Nacrtati faznu trajektoriju za česticu koja slobodno poada u homogenom polju Zemljine teže.

## 5.4 Klasična mehanika i granice njene primenljivosti

Kao što je veće napomenuto, u klasičnoj mehanici je kretanje čestice, u svakom momentu vremena $t$, okarakterisano vektorom položaja $\vec{r}$ i impulsom $\vec{p} = m\vec{v}$ (koordinatom $x$ i odgovarajućim impulsom $m\dot{x}$ ukoliko je reč o jednodimenzionalnom kretanju). Ustvari, kada znamo ove dve veličine mi znamo gde se, u datom momentu, nalazi čestica i kako se kreće. Sasvim je jasno da, ovakva predstava o telima i njihovom kretanju, podrazumeva da ona tokom vremena opisuju **neprekidne trajektorije**.

Dvadesetih godina prošlog veka je medjutim, zasnovana teorija pod nazivom kvantna mehanika, u okviru koje je pokazano da ovakav pristup opisivanju kretanja čestica ima principijelna ograničenja primenljivosti. Zalaženje u detalje zasnivanja kvantne mehanike daleko prevazilazi ovaj tekst tako da se nećemo upuštati u njih već cemo samo proanalizirati posledice njenih ograničenja.

Prema ovoj teoriji, stanje čestice u odredjenom momentu vremena, je nemoguće zadati tačnim vrednostima koordinate i impulsa u tom momentu istom vremena.[7] Greške koje se javljaju pri merenjima koordinate čestice i njenog impulsa, se nazivaju neodredjenosti i, za slučaj kada se telo kreće u jednoj dimenziji, obeležavaju se kao $\Delta x$ i $\Delta p$. Činjenica da je nemoguće tačno odrediti impuls i koordinatu se svodi zapravo na to da je greške, u njihovom odredjivanju-merenju, nemoguće učiniti proizvoljno malim. Ovo je iskazano relacijom[8]

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \tag{5.19}$$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ gde je $h$ je Plankova konstanta[9] $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s, tako da je $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s. Važno je napomenuti da Hajzenbergova relacija neodredjenosti odredjuje **principijelnu** tačnost **istovremenog** merenja koordinate i impulsa, što znači da ona ne može da se prevazidje usavršavanjem merne aparature i metoda merenja. Dakle nije reč o greškama koje se javljaju prilikom merenja, usled nedovoljno dobre merne aparature ili usled nedovoljno

[7] Ovaj stav je u kvantnoj mehanici poznat kao Hajzenbergova relacija neodredjenosti po nemačkom teorijskom fizičaru Verneru Hajzenbergu (1901-1976).

[8] Osim ove relacije postoji i relacija koja povezuje grešku u odredjivanju energije i vremenskog intervala u kome se ona mer koja glasi $\Delta E \Delta t \geq \hbar$.

[9] Ova konstanta je dobila ime po velikom nemačkom fizičaru Maks Planku (1858-1947) čiji radovi se nalaze u osnovi kvante teorije.

veštog rukovanja njome, već o ispoljavanju prirode realnih čestica da trenutno stanje kretanja ne može biti okarakterisano na **klasičan način**. Čestice se ponašaju komplikovanije nego materijalne tačke u klasičnoj mehanici. Uobičajena, klasična slika kretanja po neprekidnim putanjama, prema tome, samo približno odgovara zakonima prirode. Medjutim, mi znamo da ipak možemo da kretanje tela opisujemo na klasičan način, kao što je to radjeno do pojave kvantne mehanike a radi se i danas. Dakle, reč je samo o proceni da li je, u datoj situaciji, klasičan način opisivanja dovoljno dobar ili ne, pa je zbog toga potrebno odrediti granice primenljivosti klasične fizike.

Granice primenljivosti klasičnog načina opisivanja se mogu odrediti iz relacije (5.19). Iz nje takodje sledi da je nemoguće istovremeno odrediti tačno položaj i brzinu čestice jer važi

$$\Delta x \cdot m\Delta v \geq \hbar. \tag{5.20}$$

Recimo da posmatrano kretanje makroskopskog tela, oblika loptice mase $m = 1$ g. Njen trenutni položaj možemo u realnosti izmeriti sa tačnošću od jednog desetog ili stotog dela milimetra. U svakom slučaju je besmisleno govoriti o merenju položaja loptice sa greškom koja bi bila manja od dimenzija atoma. Prema tome, možemo da uzmemo da je, u jednom veoma idealizovanom merenju (sa najmanjom mogućom greškom), neodredjenost položaja $\Delta x = 10^{-10} m$. Na osnovu ovoga se za neodredjenost brzine dobija

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{m\Delta x} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{10^{-10}10^{-3}} \approx 10^{-21} \text{ m/s}. \tag{5.21}$$

Primetimo da je dobijena greška izuzetno mala a **istovremena** mala vrednost grešaka u odredjivanju položaja i brzine loptice je dokaz primenljivosti klasičnog načina opisivanja kretanja u praksi na **makroskopska tela**. Ukoliko je medjutim reč o atomima, situacija je potpuno drugačija. Razlog je u maloj masi čestica čije kretanje pokušavamo da opišemo. Recimo da posmatramo kretanje elektrona u atomu vodonika. Masa elektrona je $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg. Greška u odredjivanju položaja elektrona ne bi smela da bude veća od veličine atoma, odnosno mora da bude $\Delta x < 10^{-10} m$. U tom slučaju, iz relacije neodredjenosti (5.20) se dobija

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{m\Delta x} > \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31}10^{-10}} \approx 10^{6} \text{ m/s}. \tag{5.22}$$

Ukoliko se ima u vidu da je brzina elektrona pri kretanju oko jezgra atoma takodje reda veličine $10^6 m/s$, jasno je da je klasičan način opisivanja neprimenljiv jer je greška jednako velika kao i veličina koja se odredjuje. Može da se zaključi da je dakle, klasičan način opisivanja kretanja tela primenljiv samo ako se radi o dovoljno velikim telima. Ukoliko je reč o mikročesticama, da bi se dobili dovoljno tačni rezultati treba primeniti kvantnu mehaniku.

Drugo ograničenje klasičnog opisivanja kretanja je vezano za brzinu tela čije kretanje želimo da opišemo. Naime, kao što ćemo videti u narednoj glavi, klasična mehanika daje pogrešne rezultate ukoliko se tela kreću brzinama koje su velike. Tačniji rezultati se dobijaju ukoliko se za opisivanje primeni Ajnštajnova ili relativistička mehanika. U njenoj osnovi leže transformacije koordinata izmedju dva inercijalna sistema reference koje se nazivaju Lorencovim, i koje, za slučaj kada se ovi sistemi jedan u odnosu na drugi kreću brzinom $u$ duž $x$ ose, za $x$ koordinate ova dva sistema imaju oblik

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{5.23}$$

Lako je uočiti da se ova relacija razlikuje od Galilejevih transformacija (2.13), koje se nalaze u osnovi Njutnove (nerelativističke) mehanike time što postoji faktor $1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ koji je inače karakterističan za relativističku mehaniku. Ukoliko je prema tome reč o tačnijim izrazima od onih koji figurišu u nerelativističkoj mehanici, postavlja se pitanje kako to da je, Njutnova mehanika, tokom više vekova u praksi davala dobre rezultate. Štaviše, i danas se na bazi Njutnove mehanike mogu proračunati kretanja većine nebeskih tela, kosmičkih brodova, automobila, ...

Protivurečnosti ipak nema jer se navedena tela kreću relativno malim brzinama, koje su **znatno** manje od brzine svetlosti u vakuumu. A u tom slučaju relativističke formule sa tačnošću koja je dovoljna za praktične primene prelaze u njutnovske.

Neka se na primer telo kreće brzinom $u = 10$ km/s u odnosu na Zemlju.[10] Neka je za ovo telo vezan inercijalni referentni sistem čija je $x$ osa usmerena u smeru kretanja tela. Tačna veza izmedju $x$ koordinata dva posmatrana inercijalna sistema (jedan je vezan za Zemlju) je data izrazom (5.23). U ovom slučaju je odnos $u^2/c^2$

$$\frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{10^4}{3 \cdot 10^8}\right)^2 \approx 10^{-9}! \tag{5.24}$$

[10]Ovo je brzina kojom se kreću kosmičke rakete. U svakodnevnoj inžinjerskoj praksi se obično ima posla sa brzinama koje su znatno manje od ove.

Kako ovu, izuzetno malu, vrednost treba oduzeti od jedinice u izrazu (5.23) postavlja se pitanje da li je uopšte moguće eksperimentalno registrovati njeno postojanje. Naime, da bi uspeli da izmerimo da je od jedinice oduzeto $10^{-9}$ potrebna nam je merna aparatura koja ima tačnost do 9 značajnih cifara! U praksi se naravno srećemo sa mernim uredjajima znatno manje tačnosti, te je uticaj faktora (5.24), u ovom slučaju, nebitan i možemo ga zanemariti. Pod tim uslovima, izraz (5.23) prelazi u Galilejev pa se može reći da se pri analizi pojava koje se dešavaju sa brzinama koje su znatno manje od brzine svetlosti u vakuumu, sa uspehom može primenjivati Njutnova mehanika. Drugim rečima, primena Ajnštajnove mehanike, će dati iste rezultate ali će izračunavanja biti znatno složenija. Ova činjenica ukazuje na to da je zapravo Njutnova mehanika sadržana u Ajnštajnovoj kao specijalan slučaj tela koja se kreću (relativno) malim brzinama. Kada je reč o kvantitativnoj granici izmedju relativističke i nerelativističke mehanike, o njoj će više biti reči u narednoj glavi.

I u konačnom, može da se zaključi da je Njutnova mehanika-mehanika (relativno) velikih i (relativno) sporih tela. Ukoliko su tela (relativno) mala, opisivanje njihovog kretanja (ukoliko se žele dovoljno pouzdani rezultati) se mora vršti u okviru kvantne, a ako su relativno brza, u okviru Ajnštajnove mehanike.[11]

## 5.5 Osobine prostora i vremena u klasičnoj mehanici i njihova veza sa zakonima održanja

U ovom poglavlju ćemo proanalizirati kako su zakoni očuvanja energije, impulsa i momenta impulsa,[12] povezani sa svojstvima *simetrije*[13] *prostora i vre-*

[11]Teorija koja opisuje kretanje malih i brzih tela se naziva kvantna teorija polja i ona.

[12]Napomenimo da ovi zakoni održanja važe samo u inercijalnim sistemima reference. Razlog je što su oni izvedeni primenom drugog i trećeg Njutnovog zakona koji važe samo u takvim sistemima reference.

[13]Činjenica postojanja simetrije u evoluciji fizičkog sistema u prostoru i vremenu, je povezana sa činjenicom da, pri promeni prostorno vremenskih koordinata, fizički opis sistema ostaje neizmenjen. Fizički sistemi mogu, sami po sebi, da poseduju odredjene vrste simetrija, tako su na primer ljudi približno bilateralno simetrični, sfera je simetrična u odnosu na rotaciju oko bilo koje ose koja prolazi kroz njen centar, itd. Ovde medjutim nije reč o simetrijama u tom smislu već o nepromenljivosti **zakona prirode** (matematičkih izraza kojima opisujemo tela i njihove interakcije) pri promeni prostorno-vremenskih koordinata.

*mena.*[14] Videli smo da se kretanje nekog mehaničkog sistema može opisati polazeći od Lagranževe funkcije koja zatim dovodi do odgovarajućih jednačina kretanja. Pomenute simetrije prostora i vremena se u ovom prilazu zapravo svode na simetriju same Lagranževe funkcije a na osnovu toga se može doći do pomenutih zakona održanja. Drugi prilaz, zasnovan na Njutnovom prilazu mehanici, je familijarniji svima koji na ovom nivou izučavaju fiziku, pa ćemo na dalje njega primenjivati. Kao što se pokazuje, zakoni održanja se mogu dobiti iz drugog Njutnovog zakona ukoliko prilikom njegove primene/analize imamo u vidu svojstva simetrije prostora i vremena.

### 5.5.1 Simetrije prostora i vremena.

Pod simetrijama prostora i vremena podrazumevaćemo *homogenost vremena* i *homogenost i izotropnost prostora*. Homogenost vremena označava ravnopravnost svih momenata vremena. Homogenost prostora u istom smislu znači da nema izdvojenih tačaka u prostoru koje su po nečemu specifične već da su sve potpuno ravnopravne. Analogno, izotropija prostora znači da nema pravaca u prostoru koji su iz nekog razloga privilegovani u odnosu na druge već su svi pravci ekvivalentni.

Homogenost vremena se može pojasniti na sledeći način. Recimo da posmatramo mehaničke procese u izolovanom sistemu počev od nekog trenutka $t_1$ pri čemu su sva tela tog sistema bila u nekom odredjenom stanju. Tela će se u skladu sa svojim početnim uslovima (za trenutak $t_1$) i jednačinama kretanja pomerati u prostoru i mi ćemo registrovati njihovu evoluciju u toku nekog vremenskog intervala $\Delta t$. Pretpostavimo sada da smo sva tela tog istog sistema, u nekom docnijem momentu vremena $t_2$ doveli u potpuno ista početna stanja koja su imala u trenutku $t_1$. Dalje kretanje, za isti interval vremena $\Delta t$, će biti potpuno isto kao i kada se odvijalo od počev od vremenskog trenutka $t_1$. Ova čijenica predstavlja zapravo tvrdjenje da je vreme homogeno, odnosno da su svi vremenski trenuci potpuno ravnopravni. Napomenimo još da se navedena vremenska transformacija sa $t_1$ na $t_2$, može shvatiti kao translacija u vremenu.

Homogenost prostora, po analogiji sa prethodnim primerom, znači da će, ukoliko tela izolovanog sistema premestimo sa jednog mesta u prostoru na neko drugo mesto, ukoliko ih dovedemo u uslove u kojima su se nalazila

[14] Napomenimo takodje da se impuls i moment impulsa očuvavaju ukoliko je sistem izolovan (suma svih spoljašnih sila i njihovih momenata je jednaka nuli), a da je za očuvanje **mehaničke** energije neophodno i da je sistem **toplotno** izolovan.

na prethodnom mestu, to neće uticati na tok narednih pojava u sistemu. Odgovarajuća transformacija se svodi na prostornu translaciju.

U istom smislu treba shvatati i izotropiju prostora samo što je u ovom slučaju, umesto translacije u vremenu ili prostoru, reč o rotacijama u prostoru za neki ugao.

### Zakon održanja impulsa

Posmatrajmo radi jednostavnosti jednodimenzionalan[15] izolovan sistem, odnosno sistem u kome postoje samo dve unutrašnje sile. Neka se posmatrani sistem sastoji samo od dve čestice, tako da će u sistemu postojati samo dve unutrašnje sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Kako je prostor homogen, energija sistema se neće promeniti kada sistem premestimo sa jednog mesta na drugo koje se nalazi na infinitezimalnoj udaljenosti $dx$. Za potencijalnu energiju će u tom slučaju važiti[16]

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + dx, x_2 + dx) \tag{5.25}$$

za bilo koje pomeranje $dx$. Promena potencijalne energije za infinitezimalni pomeraj sistema u prostoru je takodje infinitezimalna i može prikazati kao

$$dU = \frac{dU}{dx_1}dx + \frac{dU}{dx_2}dx = \left(\frac{dU}{dx_1} + \frac{dU}{dx_2}\right) dx = 0. \tag{5.26}$$

Usled proizvoljnosti $dx$, izraza u zagradi mora da bude jednak nuli, što dovodi do toga da je zbir sila koje deluju u sistemu jednak nuli. A to je upravo bio uslov iz koga se, uz primenu drugog Njutnovog zakona, dobija zakon održanja impulsa.

### Zakon održanja momenta impulsa

Da bi proverili da li zakon održanja impulsa može da bude posledica izotropnosti prostora, posmatrajmo kretanje nekog tela po kružnici. Telo može da se kreće po takvoj putanji jedino u slučaju da na njega deluje centripetalna sila koja će ga terati da stalno savija putanju. U suprotnom, telo bi se kretalo po inerciji, odnosno po pravoj liniji.

---

[15] Sva tvrdjenja se mogu lako generalizovati na dvo i trodimenzionalan sistem.

[16] Ovo tvrdjenje je povezano sa činjenicom da je potencijalna energija posledica interakcija medju telima a one zavise samo od relativnog položaja tela, koji se neće promeniti pri promeni tačke u prostoru iz koje ga odredjujemo.

Kinetička energija tela će u tom slučaju biti $E_{kin} = mr^2\omega^2/2$, gde je $r$ poluprečnik putanje a $\omega$ ugaona brzina tela. Centripetalna sila koja telo zadržava na orbiti poluprečnika $r$ je $\vec{F} = -mr\omega^2\vec{e}_r$.[17] Ukoliko se pri kretanju tela promeni njegova kinetička energija, rad koji je pri tome izvršen je $\Delta E_{kin} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$.

Četiri pomenute veličine: kinetička energija, centripetalna sila, ugaona brzina i rastojanje od ose rotacije, su povezane sledećim jednačinama

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2,$$

$$F = -mr\omega^2,$$

$$\frac{dE_{kin}}{dr} = F.$$

Ključno je primetiti da ova tri izraza ne zavise od trenutnog položaja čestice na kružnici. Ovo upućuje na to da ne postoji pravac u prostoru koji bi, iz nekog razloga, bio privilegovan u odnosu na druge već su svi pravci ekvivalentni. Da vidimo da li se, iz ovih jednačina dobija zakon održanja momenta impulsa. Ako ga dobijemo, to će značiti ono što je i napomenuto na početku ovog poglavlja, a to je da je ovaj zakon posledica izotropije prostora.

Zamena prve dve jednačine u treću dovodi do izraza

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}r^2\omega^2\right) = -\omega^2 r \tag{5.27}$$

Dobijena je diferencijalna jednačina pri čijem rešavanju moramo da vodimo računa da ugaona brzina zavisi od udaljenosti od ose rotacije. Oblik te zavisnosti mora da bude takav da zadovolji jednačinu (5.27). Ta veza treba ima sledeći oblik

$$\omega^2 = \frac{C}{r^4},$$

jer kad se zameni u jednačinu (5.27), dovodi do

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{C}{2r^2}\right) = -\frac{C}{r^3}.$$

Ukoliko pretpostavljenu vezu ugaone brzine $\omega$ i rastojanja od ose rotacije $r$, zapišemo u obliku

$$\omega^2 r^4 = C,$$

[17] Sa $\vec{e}_r$ je označen jedinični vektor vektora položajam pri čemu je uzeto da se njegov početak nalazi u centru kruňe putanje a vrh naravno na mestu gde se trenutno nalazi telo.

nakon uzimanja kvadratnog korena i množenja masom tela $m$, dobijamo

$$m\omega r^2 = \text{ const.},$$

što predstavlja jedan od oblika u kojima možemo da zapišemo moment impulsa.

Direktnom proverom se vidi da, ako je ova veza oblika

### Zakon održanja energije

Već je ukazano na činjenicu da se zakoni fizike neće promeniti ako se promeni početni vremenski trenutak u odnosu na koji se posmatra evolucija sistema. U praksi ovo obezbedjuje ponovljivost procesa u prirodi i u eksperimentina. Na primer, način kretanja klatna neće zavisiti od toga da li ga posmatramo danas ili sutra. Posledica simetrije u vremenu je zakon održanja energije. Naime, kako energija ima veze sa radom, a rad se računa po formuli

$$A = \int F dx,$$

gde se integracija vrvši po *prostornim koordinatama*, ma kakva promena u odredjivanju početnog vremenskog trenutka neće uticati na energiju sistema.