ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Први разред, А категорија

1. Одредити да ли је број $10^{5^{10^{5^{10}}}} + 5^{10^{5^{10^{5}}}}$ дељив са 11.

2. Одредити све вредности реалног параметра a, за које једначина

$$\Big|\big||x-1|-2\big|-3\Big| = a$$

има највећи могући број решења.

3. Ана и Оља су једног дана шетале (по најкраћем путу) до својих момака Косте и Лазе. Оне су се среле у хладу једног старог дрвета. Том приликом су приметиле да сеОљин момак Лаза налази тачно на пола пута који Ана прелази до цркве, да се Анин момак Коста налази тачно на средини пута од банке до цркве, да је банка одОљине куће једнако удаљена као црква од Анине и да је растојање између банке и цркве једнако растојању између Анине иОљине куће, али да се банка налази са десне стране када Ана из своје куће гледа Ољу на балкону њене куће. Договориле су се да се у повратку у 7 увече поново сретну испод истог дрвета. Да би Ана стигла на време замолила је Косту да јој израчуна које је растојање између његове куће и старог дрвета. Он зна да растојање између његове и Анине куће износи $2km$. Колики ће пут Ана прећи од Костине куће до старог дрвета?

4. Познато је да би 60 крава појело сву траву са ливаде за 24 дана, а 30 крава за 60 дана. Сваког дана израсте иста количина траве.

(а) Колико крава би појело сву траву са ливаде за 100 дана?

(б) За колико дана би 10 крава појело сву траву са ливаде?

5. На полици се налази 14 књига. На колико начина је могуће изабрати 5 књига тако да никоје две изабране књиге нису суседне?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Први разред, Б категорија

1. Колико има петоцифрених бројева записаних непарним цифрама, међу којима је бар једна јединица?

2. Одредити све просте бројеве p такве да је $5p+1$ квадрат природног броја.

3. У xy-равни одредити површину фигуре ограничене линијом

$$|x+1| + |y-2| = 3.$$

4. Одредити да ли је број $10^{5^{10^{5^{10}}}} + 5^{10^{5^{10^{5}}}}$ дељив са 11.

5. Познато је да би 60 крава појело сву траву са ливаде за 24 дана, а 30 крава за 60 дана. Сваког дана израсте иста количина траве.

(а) Колико крава би појело сву траву са ливаде за 100 дана?

(б) За колико дана би 10 крава појело сву траву са ливаде?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Други разред, А категорија

1. Доказати да се ниједан прост број облика $p = 2^{2^n} + 1$ не може представити као разлика петих степена два природна броја.

2. Над квадратним триномом $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ дозвољено је вршити следеће операције:

1. међусобно заменити a и c за $c \neq 0$;
2. заменити x са $x + t$, где је t неки реалан број.

Може ли се применом ових операција

(а) полином $x^2 - x - 2$ трансформисати у $x^2 - x - 1$?

(б) полином $x^2 - x - 2$ трансформисати у $4x^2 + 3x$?

3. Да ли постоји комплексан број z такав да тачке одређене бројевима 1, z^{2007} и z^{2008} чине темена правоуглог троугла?

4. За углове $\triangle ABC$ важи

$$\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 1 : 2 : 3.$$

Израчунати обим овог троугла, ако је страница наспрам угла γ једнака $AB = 3$.

5. Нека је M произвољна тачка у $\triangle ABC$, R_1, R_2, R_3 растојања тачке M од тачака A, B, C, редом, а r_1, r_2, r_3 растојања тачке M од страница BC, CA, AB, редом. Доказати да је

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2\left(r_1 + r_2 + r_3\right).$$

Време за рад 180 минута.

Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Други разред, Б категорија

1. Одредити све тачке M унутар троугла ABC, такве да су површине троуглова MAB, MBC и MCA једнаке.

2. Нека је $z_1 = 1 + 2i$. Одредити комплексан број z ако је

$$\left|\frac{z-3}{2-\overline{z}}\right| = 1 \quad \wedge \quad \mathrm{Re}\left(\frac{2z-9i}{\overline{z_1}+i}\right) = 2.$$

3. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x}\,.$$

4. Доказати да се ниједан прост број облика $p = 2^{2^n} + 1$ не може представити као разлика петих степена два природна броја.

5. Марија је први уторак у месецу провела у Београду, а први уторак после првог понедељка у месецу провела је у Новом Саду. Следећег месеца, Марија је прву среду провела у Нишу, а прву среду после првог уторка у месецу на Златибору. Где је Марија те године провела 8. март?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & (1-a)z & = & a, \\ (1-a)x & - & y & + & z & = & -1, \\ x & + & (a-1)y & - & z & = & 0. \end{array}$$

2. У купу је уписана лопта. Доказати да је однос површина купе и лопте једнак односу њихових запремина.

3. Нека је $x > 0$ реалан број. Одредити поредак бројева (сортирати по величини)

$$x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, x^{x^{x^{x^x}}}.$$

4. Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ таква да:

1. $f(1) = 0$;
2. $f(p) = 1$ за сваки прост број p;
3. $f(ab) = af(b) + bf(a)$ за све природне a и b.

Одредити све n за које је $f(n) = n$.

5. У сваком пољу табле 12×2008 уписан је по један природан број. Једним потезом је дозвољено удвостручити све бројеве неке врсте или смањити за 1 све бројеве неке колоне. Да ли се увек после неког броја потеза може добити таблица у којој су сви бројеви једнаки 0?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & (1-a)z & = & a, \\ (1-a)x & - & y & + & z & = & -1, \\ x & + & (a-1)y & - & z & = & 0. \end{array}$$

2. Доказати да једначина

$$2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{x^2} + x^2$$

нема решења у скупу реалних бројева.

3. На кошаркашком турниру учествовало је 8 екипа и свака је са сваком одиграла по једну утакмицу. За победу се добија два поена, а поражена екипа добија 0 поена (нема нерешених утакмица). Екипе су сакупиле редом 14,12,8,8,6,4,2,2 поена. Колико утакмица су последње четири екипе изгубиле од прве четири екипе?

4. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcl} \log_{|x-y|} \dfrac{xy}{2} & = & 2, \\ x + y & = & xy + 1. \end{array}$$

5. У купу је уписана лопта. Доказати да је однос површина купе и лопте једнак односу њихових запремина.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Четврти разред, А категорија

1. Одредити за које $a, b \in \mathbb{R}$ графици функција

$$f(x) = a \cdot 2^x + b \quad \text{и} \quad g(x) = b \cdot 2^{-x} + a$$

имају тачно две заједничке тачке. Одредити те тачке.

2. Одредити све природне бројеве n за које је $5^n + 12^n$ потпун квадрат.

3. Ако је $a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} < n \cdot \sqrt[n]{a_0^2}$, доказати да бар једно решење једначине

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

није реалан број.

4. Нека је H ортоцентар оштроуглог $\triangle ABC$, а a, b и c одговарајуће странице. Доказати да је

$$\frac{AH}{a} \cdot \frac{BH}{b} \cdot \frac{CH}{c} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}\,.$$

5. На колико различитих начина се могу поређати шест томова енциклопедије на полицу, тако да 1. том није ни први ни последњи у низу, 2. том се налази поред 3. тома, а 5. и 6. том се не налазе један поред другог?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0, \\ x & + & ay & - & 3z & = & 1, \\ ax & - & y & + & z & = & 0. \end{array}$$

2. Израчунати површину паралелограма конструисаног над векторима $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$, при чему је $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$ и $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

3. На кошаркашком турниру учествовало је 8 екипа и свака је са сваком одиграла по једну утакмицу. За победу се добија два поена, а поражена екипа добија 0 поена (нема нерешених утакмица). Екипе су сакупиле редом 14,12,8,8,6,4,2,2 поена. Колико утакмица су последње четири екипе изгубиле од прве четири екипе?

4. У лопту полупречника r уписан је ваљак највеће могуће површине омотача. Одредити запремину тог ваљка.

5. Одредити за које $a, b \in \mathbb{R}$ графици функција

$$f(x) = a \cdot 2^x + b \quad \text{и} \quad g(x) = b \cdot 2^{-x} + a$$

имају тачно две заједничке тачке. Одредити те тачке.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.