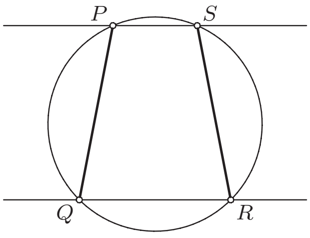
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

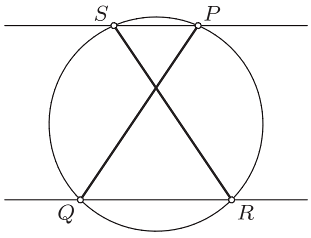
Први разред, А категорија

1. *Лема. Ако нека права сече кружницу у тачкама P и S, а њој паралелна права у тачкама Q и R, тада је $PQ = RS$.*

Доказ. PQ и RS су или краци или дијагонале једнакокраког трапеза (права која пролази кроз центар кружнице, а нормална је на уочену праву је оса симетрије).

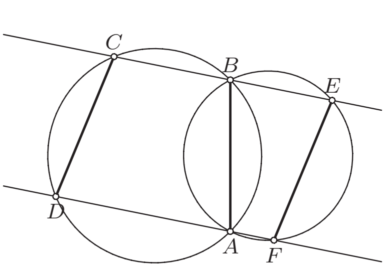


ОК 08 1А 1-1

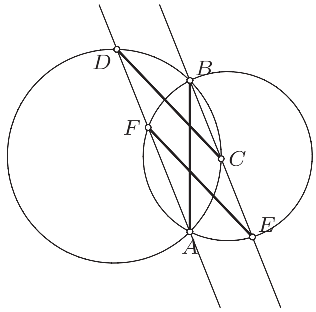


ОК 08 1А 1-2

Из претходне леме примењене на k_1 следи $CD = AB$, док се применом на k_2 добија $AB = EF$, одакле је $CD = EF$.



ОК 08 1А 1-3



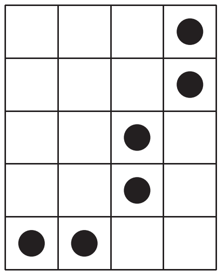
ОК 08 1А 1-4

2. **(а)** Двоцифраних бројева има $99 - 9 = 90$, па парова двоцифрених бројева има $\binom{90}{2} = 4005$, а парова узастопних двоцифрених бројева $90 - 1 = 89$. Дакле, два несуседна двоцифрена броја се могу изабрати на $4005 - 89 = 3916$ начина.

(б) Места на којима се налази цифра 5 се могу изабрати на $\binom{5}{2}$ начина, преостале 3 цифре из уоченог скупа на $\binom{6}{3}$ начина и на преостала три места се могу распоредити на $3!$ начина, па је тражени број је $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot 3! = 1200$ (Тангента 46, стр. 39, Писмени задаци, задатак 1).

3. На табли 5×4, при условима задатка, се може поставити 6 топова (видети слику).

Нека је на тој табли распоређен највећи могући број топова, тако да су испуњени услови задатка. По претходном примеру тај број није мањи од 6. Ако се у свакој колони налази највише један топ, број топова на табли је највише 4, па постоји колона која садржи бар два топа. Како се они међусобно нападају, у тој колони, као и у врстама у којима се налазе ова 2 топа, не сме бити других топова, тј. сви се налазе у преостале 3 врсте и преостале 3 колоне (на преосталих 9 поља).



ОК 08 1А 3

Аналогно, ако се у свакој од преостале 3 колоне налази највише 1 топ, укупан број топова на табли је највише $2+3=5$, па се у некој од њих налази бар два топа. Како се они међусобно нападају, у тој колони, као и у врстама у којима се налазе ова 2 топа, не сме бити других топова, тј. сви се налазе у преостала 2 поља, па је највећи могући број топова $2+2+2=6$.

Дакле, тражени број је 6.

4. Алгебарским трансформацијама добија се да је полазна једнакост еквивалентна са

$$(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z. \tag{$*$}$$

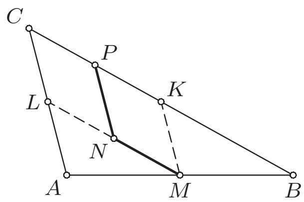
Ако би x, y и z давали различите остатке при дељењу са 3, тада би њихови остаци при дељењу са три били 0, 1 и 2 (у неком редоследу), па је $x+y+z\equiv 0+1+2\equiv 0 \pmod 3$, а $(x-y)(y-z)(z-x)\not\equiv 0 \pmod 3$, тј. нека два од x, y и z морају дати исти остатак при дељењу са 3.

Нека је, без губљења општости, $x\equiv y \pmod 3$. Међутим, тада $3\mid(x-y)(y-z)(z-x)$, па је, на основу $(*)$, $0\equiv x+y+z\equiv 2x+z\equiv -x+z \pmod 3$, односно $x\equiv z \pmod 3$. Дакле, сваки умножак у $(x-y)(y-z)(z-x)$ је дељив са 3, тј. $3^3\mid(x-y)(y-z)(z-x)$, па из $(*)$ следи да $27\mid x+y+z$.

5. Нека је $\triangle ABC$ такав да је $AB=3$, $BC=4$ и $CA=2$ (такав троугао постоји).

Нека су K, L, M средишта страница BC, CA, AB, редом, N средиште дужи LM, а P средиште дужи CK.

Тада је $ML=2$ и $ML\parallel BC$ (средња линија $\triangle ABC$), па је $MN=NL=1$ и $MN\parallel NL\parallel BC$. По конструкцији је $CP=PK=1$ (и, наравно, $CP\parallel PK\parallel BC$). Аналогно ($KM$ је средња линија $\triangle ABC$) је $KM=CL=NP=\dfrac{1}{2}\cdot AC$ и $KM\parallel PN\parallel CL\parallel AC$.



ОК 08 1А 5

Следи да су четвороуглови $NMKP$ и $LNPC$ подударни паралелограми (ромбови странице 1), као и да је $\triangle AML\cong\triangle MBK$ ($AM=MB$, $AL=MK$, $ML=BK$), па полигони $MBPN$ и $AMNPC$ имају једнаке површине (оба се „састоје“ од једног ромба странице 1 и једног од горе поменутих троуглова).

Дакле, полигонална линија састављена од дужи MN и NP задовољава услове задатка.

Први разред, Б категорија

1. Да не би дошло до дељења нулом, мора бити $|2x-3|-5\neq 0$, а како је и $|x-3|+2>0$ за свако реално x, следи да је неједначина из задатка еквивалентна са $|2x-3|-5<0$.

За $x\geqslant\dfrac{3}{2}$ она је еквивалентна са $2x-3<5$, тј. $x<4$ (односно решења су $x\in\left[\dfrac{3}{2},4\right)$), а за $x<\dfrac{3}{2}$ са $3-2x<5$, тј. $x>-1$ (односно решења су $x\in\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$).

Дакле, решење је $x\in(-1,4)$ (Тангента 44, стр. 33, Писмени задаци, задатак 2(а)).

2. Нека су M,N,P,Q средишта дужи AF, CE, BF и DE, редом, и $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{c}+\overrightarrow{DE}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}+\overrightarrow{DF}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{c}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}+\frac{\vec{c}}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) \qquad \text{и, аналогно,}\\
\overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{b}+\overrightarrow{DF}\right)-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{DE}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right),
\end{aligned}$$

тј. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, одакле следи да је $MNPQ$ паралелограм.

3. Сређивањем израза из задатка добија се

$$\left(a^2 - 6a + b + 2\right) + \sqrt{2} \cdot (2a - 6) = 0.$$

Међутим, како је број $\sqrt{2}$ ирационалан, следи да је $p + \sqrt{2} \cdot q = 0$ за $p, q \in \mathbb{Q}$ ако и само ако је $p = q = 0$, па је $a^2 - 6a + b + 2 = 2a - 6 = 0$, одакле је $a = 3$, $b = 7$ (Тангента 45, стр. 38, Писмени задаци, задатак 5).

4. Видети решење првог задатка за први разред А категорије.

5. Видети решење другог задатка за први разред А категорије.

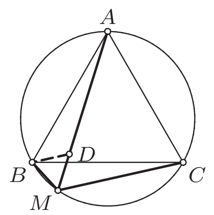
Други разред, А категорија

1. Једначина је дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$. Нека је $y = \sqrt[3]{a - x}$. Тада је $x = a - y^3$, па једначина постаје $y^3 + y = a^3 + a$, тј. $(y - a)(y^2 + ya + a^2 + 1) = 0$. Како је $y^2 + ya + a^2 + 1 > 0$ (квадратна функција са водећим коефицијентом позитивним и дискриминантом $a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 + 1) = -3a^2 - 4 < 0$), једино решење последње једначине је $y = a$, одакле је $\sqrt[3]{a - x} = a$, тј. једино решење је $x = a - a^3$ (Тангента 50, стр. 10, М673, Наградни задаци).

Напомена. Да једначина има највише једно решење се могло видети и без растављања, на основу строгог раста функције $y \to y^3 + y$.

2. По условима задатка, четвороугао $MCAB$ је тетиван, па, по Птоломејевој теореми, следи $MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$. Како је $\triangle ABC$ једнакостраничан, следи $BC = AC = AB$, одакле је $MA = MB + MC$.

Друго решење. Нека је $\mathcal{R}$ ротација са центром у B, која слика тачку C у тачку A (по условима задатка, ова ротација је или за 60° или за -60°, у зависности од оријентације $\triangle ABC$) и нека је $\mathcal{R}(M) = D$.
$\triangle BMD$ је једнакостраничан ($BM = BD$ и $\sphericalangle DBM = 60^\circ$), па је $MB = MD$. Такође, $MC = DA$ (јер је $\mathcal{R}(M) = D$ и $\mathcal{R}(C) = A$).
Притом је и $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BMD = 120^\circ$ (јер је $\mathcal{R}(\triangle BMC) = \triangle BDA$), а како је $\sphericalangle MDB = 60^\circ$, следи да су тачке M, D и A колинеарне.
Дакле, $MA = MD + DA = MB + MC$.



ОК 08 2А 2

3. Из датих ограничења за α и β следи да је $\dfrac{\pi}{2} < \alpha + 2\beta < \dfrac{3\pi}{2}$.

Нека је $t = \operatorname{tg}\beta$. Тада је $\sin 2\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \dfrac{2t}{1 + t^2}$, $\cos 2\beta = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, а, по условима задатка, $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$.

Следи да је $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{2t}{1 + t^2}\right)^2 = \dfrac{(1 - t^2)^2}{1 + t^2}$. Како је α оштар, следи да је $\cos\alpha > 0$, а како је $t = \operatorname{tg}\beta \geqslant 1$ (јер је $\beta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$), следи да је $\cos\beta = \dfrac{t^2 - 1}{1 + t^2}$, па је

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2\beta) &= \sin\alpha\cos 2\beta + \cos\alpha\sin 2\beta \\ &= \frac{2t}{1 + t^2} \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{t^2 - 1}{1 + t^2} \cdot \frac{2t}{1 + t^2} = 0,\end{aligned}$$

односно, $\alpha + 2\beta = k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$. Из горњег ограничења, следи да мора бити $\alpha + 2\beta = \pi$.

4. Систем $a - b = \alpha \wedge ab = \beta > 0$ по непознатима a и b има увек два решења

$$(a_1, b_1) = \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}, \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}\right) \text{ и } (a_2, b_2) = \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}, \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}\right).$$

1. ако је $\alpha > 0$, следи $\max(a_1, b_1) = a_1$ и $\max(a_2, b_2) = a_2$, па је $x^2 - \alpha x - \beta$ квадратни полином чији су корени a_1 и a_2 (односно $x^2 - |\alpha| x - \beta$);

2. ако је $\alpha < 0$, следи $\max(a_1, b_1) = b_1$ и $\max(a_2, b_2) = b_2$, па је $x^2 - \alpha x - \beta$ квадратни полином чији су корени су b_1 и b_2 (односно $x^2 - |\alpha| x - \beta$).

Дакле, тражени полином је $x^2 - |\alpha| x - \beta$ (тј. $p = |\alpha|$ и $q = -\beta$).

5. Лифт се (без икаквих услова) може испразнити на $5^5 = 3\,125$ начина, јер свака од тих 5 особа може сићи на било ком спрату од 1. до 5.

Нека је N број начина на који они могу излазити из лифта тако да Аца и Цеца остану сами. Душан, Лука и Наташа могу напустити лифт до k-тог спрата тако да бар неко сиђе на k-том спрату на $k^3 - (k-1)^3$ начина (тада су Аца и Цеца остали сами у лифту). Свако од њих двоје може да изађе на неком од преосталих $5-k$ спратова. Како k може бити било који спрат од 1. до 4. (јер Аца и Цеца морају да остану сами) то је

$$N = \sum_{k=1}^{4} \left[\left(k^3 - (k-1)^3\right) \cdot (5-k)^2 \right] = 4^2 + 7 \cdot 3^2 + 19 \cdot 2^2 + 37 \cdot 1^2 = 192.$$

Уместо Аце и Цеце ту може остати било који мушко-женски пар, а таквих парова има $\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 6$, па је број начина да ових 5 особа напусти лифт, тако да ни у једном тренутку мушкарац и жена нису сами у лифту једнак

$$5^5 - \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot N = 3\,125 - 6 \cdot 192 = 1\,973.$$

Други разред, Б категорија

1. Мора бити $|1 - iz| \neq 0$. тј. $z \neq -i$. Ако је $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, следи $x^2 + y^2 = |z|^2 = |1 - iz|^2 = |(1+y) - ix|^2 = (1+y)^2 + x^2$, одакле је $y = -\dfrac{1}{2}$.

Дакле, скуп решења је $\left\{ z \mid Im\, z = -\dfrac{1}{2} \right\}$ (тј. сви бројеви облика $x - i \cdot \dfrac{1}{2}$ за $x \in \mathbb{R}$).

2. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

3. Мора бити $a \neq \dfrac{3}{2}$ (иначе једначина није квадратна). По условима задатка, једначина има реална решења, па јој је дискриминанта ненегативна, тј. $0 \leqslant 4(a+1)^2 - 4(2a-3)(a+7) = -4(a+11)(a-2) = 4D_1$, тј. мора бити $a \in [-11, 2]$.

Дакле, треба размотрити ситуације:

1. $\dfrac{3}{2} < a \leqslant 2$; тада је мањи корен једначине $\alpha = \dfrac{a+1-\sqrt{D_1}}{2a-3}$, па треба испитати да ли је $\alpha > 1$, што је еквивалентно са $\sqrt{D_1} < 4 - a$, па како су обе стране последње неједнакости (у овом случају) ненегативне, последње је еквивалентно са $(a{+}2)(2a{-}3) > 0$, што је тачно;

2. $-11 \leqslant a < \dfrac{3}{2}$; тада је мањи корен једначине $\alpha = \dfrac{a+1+\sqrt{D_1}}{2a-3}$, па треба испитати да ли је $\alpha > 1$, што је еквивалентно са $\sqrt{D_1} < a - 4$, а последње није тачно, јер је $\sqrt{D_1} \geqslant 0$, а (у овом случају) $a - 4 < 0$, тј. у овом случају нема решења.

Дакле, оба корена једначине $(2a-3)x^2 - 2(a+1)x + a + 7 = 0$ су већа од 1 ако и само ако је $a \in \left(\dfrac{3}{2}, 2 \right]$ (Тангента 49, стр. 29, Писмени задаци, задатак 4).

4. Права која не садржи темена уоченог 2008-угла сече дуж одређену са нека два његова темена ако и само ако се она налазе у различитим полуравнима одређеним том правом. Дакле, ако се у једној од тих полуравни налази x темена, у другој се налази $2008 - x$, односно број уочених дужи које сече та права је $x(2008 - x)$.

Како је, на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, $x(2008-x) \leqslant \left(\frac{x+2008-x}{2}\right)^2 = 1004^2$, следи да је тај број не већи од 1004^2 и достиже се када се у свакој од полуравни одређених том правом налази 1004 темена уоченог 2008-угла.

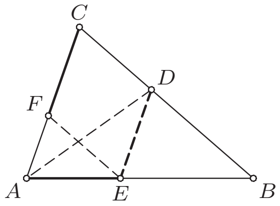
5. Видети решење другог задатка за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

1. Како је $DE \parallel AC$, следи да је $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EDA$. Како је AD симетрала $\sphericalangle BAC$, следи $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EAD$. Дакле, $\sphericalangle EDA = \sphericalangle EAD$, па је $\triangle ADE$ једнакокраки, одакле је $AE = DE$.

Како је $DE \parallel CF$ и $EF \parallel CD$, четвороугао $DEFC$ је паралелограм, па је и $DE = FC$.

Дакле, $AE = DE = FC$.



ОК 08 3А 1

2. За $k \in \{1, 2, \ldots, 29\}$ важи $\operatorname{tg}(k+1)^\circ = \dfrac{\operatorname{tg} k^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ}{1 - \operatorname{tg} k^\circ \cdot \operatorname{tg} 1^\circ}$, па ако је $\operatorname{tg} k^\circ \in \mathbb{Q}$ следи $\operatorname{tg}(k+1)^\circ \in \mathbb{Q}$.

Из претходног, ако је $\operatorname{tg} 1^\circ \in \mathbb{Q}$, следи да су рационални, редом, $\operatorname{tg} 2^\circ, \operatorname{tg} 3^\circ, \ldots, \operatorname{tg} 30^\circ$, што је контрадикција, јер је $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ирационалан број.

Из добијене контрадикције следи да је број $\operatorname{tg} 1^\circ$ ирационалан.

3. Из услова задатка следи:

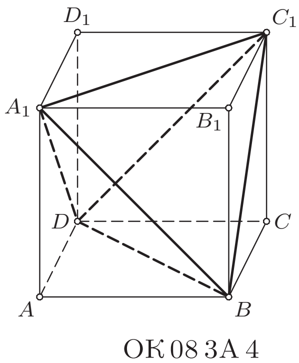
$$\begin{array}{rcl} a_1^2 & \leqslant & a_1^2 \\ 3a_2^2 & \leqslant & a_2^2 + 2a_1a_2 \\ 5a_3^2 & \leqslant & a_3^2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (2n-1)a_n^2 & \leqslant & a_n^2 + 2a_1a_n + \ldots + 2a_{n-1}a_n, \end{array}$$

одакле је, сабирањем,

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \ldots + (2n-1)a_n^2 \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = 1.$$

4. Свака од страна коцке не може бити страна тетраедра, па на њу належу основама бар две стране тетраедара на које је разложена, тј. ивице ових тетраедара разлажу сваку страну коцке на бар 2 троугла.

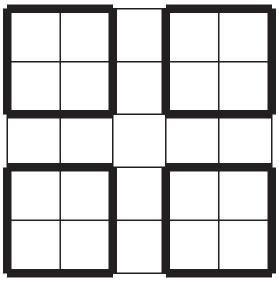
Без умањења општости, нека је страна коцке 1. Нека се коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ може исећи на 4 тетраедра. Тада на стране $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ належу сва 4 тетраедра, па сва 4 за основу имају једнакокракоправоугли троугао крака 1 (квадрат се правом може разложити на 2 троугла једино ако се та права поклапа са неком од дијагонала квадрата), док им је висина која одговара тој основи не већа од 1. Следи па је запремина сваког од ових тетраедара на већа од $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$, па је укупна запремина ова 4 тетраедра не већа од $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, што је немогуће, јер је запремина коцке 1.



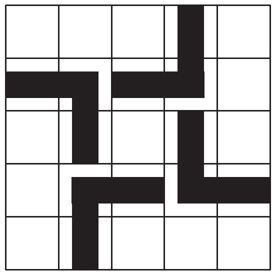
ОК 08 3А 4

Коцка се може исећи на 5 тетраедара (слика ОК 08 3А 4; то су тетраедри $ABDA_1$, $BCDC_1$, $A_1B_1C_1B$, $A_1C_1D_1D$ и BDA_1C_1) (Тангента 43, стр. 43, Наградни задаци, М543, решење у Тангенти 44, стр. 29)

5. Један L-тримино постављен на уочену таблу може имати заједничких поља са највише једним од четири угаона квадрата 2×2 (слика ОК 08 3А 5-1). Следи да је 3 L-тримина недовољно, јер су тада непопуњена сва четири поља у једном од тих угаоних квадрата, па се може додати (у тај квадрат) још један L-тримино.



ОК 08 3А 5-1



ОК 08 3А 5-2

Четири L-тримина су довољна. Заиста, на слици ОК 08 3А 5-2 су на таблу 5×5 постављена 4 L-тримина, а не може се поставити више ниједан L-тримино.

Трећи разред, Б категорија

1. Да би једначина била дефинисана, мора бити $x \neq 3$, $\dfrac{x+1}{x-3} > 0$ и $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x+1}{x-3} > 1$, тј. (логаритамска функција са основом мањом од 1 је опадајућа)

$$0 < \frac{x+1}{x-3} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x+1}{x-3} > 0 \land \frac{4}{x-3} < 0\right),$$

одакле следи да мора бити $x \in (-\infty, -1)$.

Како је логаритамска функција растућа ако јој је основа већа од 1, а опадајућа ако јој је основа мања од 1, за $x \in (-\infty, -1)$ следи

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-3} \geqslant 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-3} \geqslant 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-3} \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3x+7}{4(x-3)} \leqslant 0,$$

тј. (за $x \in (-\infty, -1)$ је $x - 3 < 0$) $x \geqslant -\dfrac{7}{3}$, па је решење ове једначине $x \in \left[-\dfrac{7}{3}, -1\right)$ (Тангента 47, стр. 36, Писмени задаци, задатак 5).

2. Како је $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ (специјално, $\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$ и $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$), по условима задатка следи да је

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{m} \cdot \vec{n} = (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 5\vec{b}) = 2\,|\vec{a}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - 5\big|\vec{b}\big|^2 \\ &= 2 \cdot 2^2 + 9 \cdot |\vec{a}| \cdot \big|\vec{b}\big| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) - 5 \cdot 3^2 = -37 + 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}), \end{aligned}$$

одакле је $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{37}{54}$, тј. угао између $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је $\arccos \dfrac{37}{54}$ (Тангента 50, стр. 33, Писмени задаци, задатак 2).

3. Видети решење трећег задатка за други разред А категорије.

4. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

5. Видети решење петог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

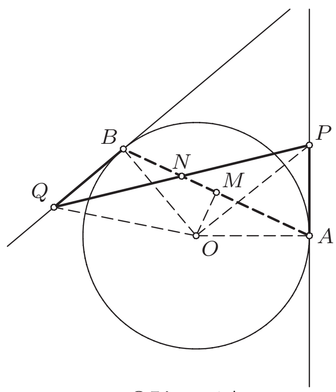
1. Нека је $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ и нека је $a \leqslant b \leqslant c$ (без умањења општости). Ако је $a = b$ или $b = c$, тада је $f(b) = (b-a)(b-c) = 0$, па се може претпоставити да је $a < b < c$. Како је $f(b) = (b-c)(b-a) < 0$ и $f(a) = (a-b)(a-c) > 0$, постоји нула f која је између a и b (постоји и између b и c, јер је и $f(c) > 0$) (полином је непрекидна функција).

2. Нека су a, b и c корени једначине из задатка, који су странице правоуглог троугла и нека је (без умањења општости) $c^2 = a^2 + b^2$. Из Виетових правила је $a + b + c = 12$ и $ab + bc + ca = m$, па је $2c^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 144 - 2m$, тј. $m = 72 - c^2$. Како је и $c^3 - 12c^2 + mc - 60 = 0$ (c је корен ове једначине), следи $0 = c^3 - 12c^2 + (72 - c^2)c - 60 = -12c^2 + 72c - 60$, тј. $0 = c^2 - 6c + 5 = (c-5)(c-1)$.

Ако је $c = 1$, следи $a + b = 11$ и $a^2 + b^2 = 1$, па је, на основу неједнакости између квадратне и аритметичке средине (као странице троугла, a и b су позитивни бројеви), $1 = a^2 + b^2 \geqslant 2 \cdot \sqrt{\dfrac{a+b}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{11}{2}} > 1$.

Из добијене контрадикције следи да је $c = 5$ и тада је $m = 72 - 5^2 = 47$ (провером се добија да су за $m = 47$ корени дате једначине 3, 4 и 5) (Тангента 44, стр. 45, Писмени задаци, задатак 5).

3. Нека су M и N, редом, средишта дужи AB и PQ. Из подударности троуглова OAP и OBQ ($AP = QB$, $OA = OB$, $\sphericalangle OAP = 90^\circ = \sphericalangle OBQ$) следи $\triangle OPQ \sim \triangle OAB$ ($OP = OQ$, $OA = OB$, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOP + \sphericalangle POB = \sphericalangle BOQ + \sphericalangle POB = \sphericalangle POQ$), одакле је $\triangle OMN \sim \triangle OAP$ ($OM : ON = OA : OP$, $\sphericalangle MON = \sphericalangle PON - \sphericalangle POM = \sphericalangle AOM - \sphericalangle POM = \sphericalangle AOP$). Дакле, $\sphericalangle OMN = 90^\circ = \sphericalangle OMB$, па A, B и N леже на истој правој.



ОК 08 4А 3

3. Нека су A и B тачке неке кружнице, а P и Q тачке, такве да су праве AP и BQ тангенте на ту кружницу, $AP = BQ$ и права PQ није паралелна са правом AB. Доказати да права AB полови PQ.

4. Нека је f дефинисана на скупу простих бројева са:

$$f(2) = 3^2, \qquad f(3) = 2^2, \qquad f(p) = p^2, \quad \text{за} \quad p > 3,$$

а за произвољан (сложен) $n \in \mathbb{N}$ са

$$f(n) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot f(p_s)^{\alpha_s},$$

где је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ (канонска факторизација броја n).

Ова функција задовољава услове задатка.

5. Нека се низу који задовољава услове задатка на крај додају још две нуле (тако се добија низ дужине 12). Услови задатка задовољени ако и само ако се (у новодобијеном низу) након сваке јединице налазе две нуле. Другим речима, свакој јединици се може придружити блок дужине три (који садржи јединицу и две наредне нуле), такви блокови се не преклапају, и изван тих блокова су све нуле.

Ако јединица у низу има k, таквих низова има $\binom{12-2k}{k}$ (комбинације k блокова и $12-3k$ нула), па је укупан број оваквих низова

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{12-2k}{k}=\binom{12}{0}+\binom{10}{1}+\binom{8}{2}+\binom{6}{3}+\binom{4}{4}=60.$$

Четврти разред, Б категорија

1. Полином x^2+x+1 има две различите нуле, па је довољно показати да је $(\alpha+1)^p-\alpha^p-1=0$, где је α нула полинома x^2+x+1, тј. важи $\alpha^2+\alpha+1=0$ и $0=(\alpha^2+\alpha+1)\cdot(\alpha-1)=\alpha^3-1$ (односно $\alpha^3=1$).

Из ових веза и како је p непаран следи да је $(\alpha+1)^p-\alpha^p-1=(-\alpha^2)^p-\alpha^p-1=-(\alpha^{2p}+\alpha^p+1)$. Како је сваки прост број већи од 4 или облика $6k+1$ за неко $k\in\mathbb{N}$ или облика $6k+5$ за неко $k\in\mathbb{N}_0$, следи:

1. ако је $p=6k+1$ за неко $k\in\mathbb{N}$, тада је $\alpha^{2p}+\alpha^p+1=\alpha^{12k+2}+\alpha^{6k+1}+1=\alpha^2+\alpha+1=0$, тј. $(\alpha+1)^p-\alpha^p-1=0$;
2. ако је $p=6k+5$ за неко $k\in\mathbb{N}_0$, тада је $\alpha^{2p}+\alpha^p+1=\alpha^{12k+10}+\alpha^{6k+5}+1=\alpha+\alpha^2+1=0$, тј. $(\alpha+1)^p-\alpha^p-1=0$.

2. Како је $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{x},\vec{y})$ (специјално, $\vec{x}\cdot\vec{x}=|\vec{x}|^2$ и $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$), и како је, по условима задатка, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, односно како је угао између било која два различита вектора из овог скупа $\frac{\pi}{3}$, следи

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2 &= \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\\ &+ 2\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{b},\vec{c})+2\cdot|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{c},\vec{a})\\ &= 3+2\cdot\left(\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})+\cos\sphericalangle(\vec{b},\vec{c})+\cos\sphericalangle(\vec{c},\vec{a})\right)=6.\end{aligned}$$

Дакле, $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{6}$.

3. Ако се и куглице и кутије разликују, свака куглица се, независно од осталих, може распоредити у произвољну од 7 кутија, па је одговор на питање дела (а) $7^4=2401$.

Ако се не разликују ни кутије ни куглице, тражени број је једнак броју неуређених разбијања броја 4 на 7 делова (тј. број решења једначине $x_1+x_2+\ldots+x_7=4$ при условима $x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_7\geqslant 0$). За ове бројеве се ова разбијања лако могу исписати (у питању су „мали“ бројеви):

$$\begin{aligned}7 &= 4+0+0+0+0+0+0=3+1+0+0+0+0+0=2+2+0+0+0+0+0\\ &= 2+1+1+0+0+0+0=1+1+1+1+0+0+0,\end{aligned}$$

тј. одговор да питање дела (б) је 5 (Тангента 48, стр. 14, Наградни задаци, M626(а)(г), решење у Тангенти 49, стр. 16).

4. Видети решење првог задатка за четврти разред А категорије.

5. Видети решење другог задатка за четврти разред А категорије.