Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2007.

Први разред – А категорија

1. Аутомобил креће из места A константном брзином по правом путу. Сваких 15 минута ауто скрене под углом од 90 степени лево или десно. Доказати да се ауто може вратити у место A само после целог броја сати.

Решење: Поставимо Декартов правоугли координатни систем тако да је координатни почетак у тачки A, а да се кретање одвија дуж оса x и y, и нека за 15 минута ауто пређе дужину 1. Тада се после сваког скретања или x или y координата аутомобила повећа или смањи за 1, при чему се x и y координате мењају наизменично. Да би аутомобил поново дошао у тачку A, и x и y координате морају да се промене паран број пута. Како се оне мењају наизменично закључујемо да број x-промена и број y-промена морају бити исте парности. Другим речима укупне дужине хоризонталног и вертикалног дела пута морају бити исте парности. Одавде се закључује да је укупна дужина пређеног пута дељива са 4, дакле до поновног доласка у тачку A протекао је цео број сати.

2. Решити систем једначина ($[x]$ је цео део реалног броја x)

$$\begin{aligned} x-y &= 2005 \\ [x]+[y] &= 2007. \end{aligned}$$

M504

Решење: Прву једначину датог система можемо записати и у облику

$$[x]+\{x\}-[y]-\{y\}=2005,$$

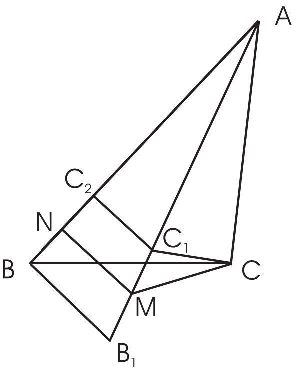
одакле следи $\{x\}-\{y\}\in\mathbb{Z}$, тј. $\{x\}=\{y\}$, због $0\leqslant\{x\},\{y\}<1$, па је

$$\begin{aligned} [x]-[y] &= 2005 \\ [x]+[y] &= 2007, \end{aligned}$$

тј. $[x]=2006$ и $[y]=1$. Дакле, дати систем има бесконачно много решења и $\mathcal{R}=\{(2006+\omega,1+\omega)\mid 0\leqslant\omega<1\}$.

3. На симетрали $\sphericalangle BAC$ троугла ABC уочене су тачке B_1 и C_1 такве да је $BB_1\perp AB$, $CC_1\perp AC$. Нека је M средиште дужи B_1C_1. Доказати да је $MB=MC$.

Решење: Уочимо на правој AB тачке C_2 и N такве да важи $C_1C_2 \perp AB$, $MN \parallel B_1B$ (слика 1). На основу подударности троуглова AC_1C и AC_1C_2 следи да је $C_1C = C_1C_2$. Како је M средиште дужи B_1C_1 и $C_1C_2 \perp AB$ следи да је N средиште дужи BC_2. Стога је висина MN троугла BMC_2 уједно и тежишна дуж, па је тај троугао једнакокрак, тј. $BM = MC_2$. С друге стране, из подударности троуглова MC_1C_2 и MC_1C следи да је $MC = MC_2$. Према томе, $BM = MC_2 = MC$.



Слика 1.

4. За природне бројеве a, b и c важи $a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} = \frac{4016}{2007}$. Доказати да је $\frac{1}{c+\frac{1}{b+\frac{1}{a}}} = \frac{2007}{4016}$.

Решење: Како су a, b, c природни бројеви, и како је $b + \frac{1}{c} > 1$, а самим тим и $\frac{1}{b+\frac{1}{c}} < 1$, имамо да је a највећи природан број мањи од $\frac{2007}{4016}$, тј. $a = 2$. Тада је $b + \frac{1}{c} = \frac{2007}{2}$, па је b највећи природан број мањи од $\frac{2007}{2}$, тј. $b = 1003$, а $c = 2$. Тада добијамо и да је $\frac{1}{c+\frac{1}{b+\frac{1}{a}}} = \frac{2007}{4016}$, што је и требало доказати.

5. Одредити на колико начина можемо факторисати број 441000 на два фактора m и n, тако да је $m > 1$, $n > 1$, и НЗД$(m, n) = 1$, при чему редослед фактора није битан (тј. производи $m \cdot n$ и $n \cdot m$ представљају исто факторисање).

Решење: Како је $441000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$, тражених представљања као производ два фактора имамо колико и разбијања скупа $X = \{2^3, 3^2, 5^3, 7^2\}$ на два непразна подскупа:

$$X = \{2^3\} \cup \{3^2, 5^3, 7^2\},\ X = \{3^2\} \cup \{2^3, 5^3, 7^2\},$$

$$X = \{5^3\} \cup \{3^2, 2^3, 7^2\},\ X = \{7^2\} \cup \{2^3, 3^2, 5^3\},$$

$$X = \{2^3, 3^2\} \cup \{5^3, 7^2\},\ X = \{2^3, 5^3\} \cup \{3^2, 7^2\},\ X = \{2^3, 7^2\} \cup \{3^2, 5^3\}.$$

Дакле одговор је 7.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – А категорија

1. Одредити скуп свих тачака комплексне равни које задовољавају

$$|\frac{1}{z} - i| \leqslant 1.$$

M501

Решење 1: За $z = x + iy$ имамо

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2+y^2},$$

односно

$$|\frac{1}{z} - i|^2 = (\frac{x}{x^2+y^2})^2 + (1 + \frac{y}{x^2+y^2})^2 = \frac{x^2+y^2+2y+1}{x^2+y^2}.$$

Квадрирањем и сређивањем добија се

$$|\frac{1}{z} - i|^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2y+1}{x^2+y^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2y+1 \leqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Дакле, скуп решења су сви комплексни бројеви z који задовољавају $Im(z) \leqslant -\frac{1}{2}$.

Решење 2:

$$|\frac{1}{z} - i| \leq 1 \Leftrightarrow |\frac{1-zi}{z}| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|1-zi|}{|z|} \leq 1 \Leftrightarrow |1-zi| \leq |z| \Leftrightarrow$$

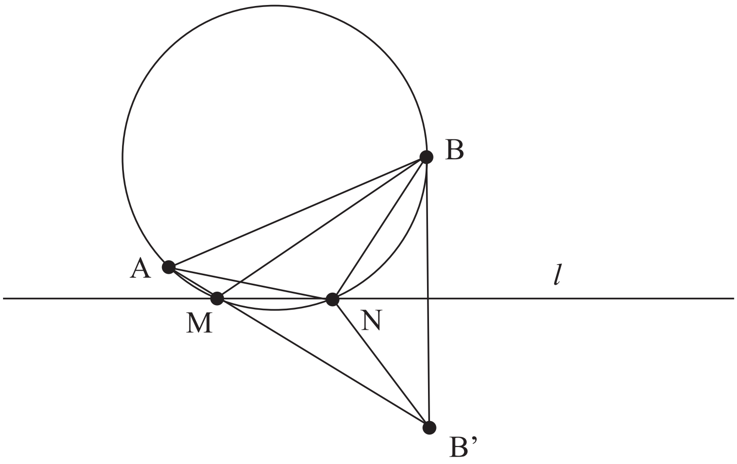
$$|1-(x+yi)i| \leq |x+yi| \Leftrightarrow |(1+y)-xi| \leq |x+yi| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(1+y)^2+x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 1+2y+y^2+x^2 \leq x^2+y^2 \Leftrightarrow 1+2y \leq 0.$$

2. У равни су задати права l и тачке A и B са исте стране l. Нека је M тачка на l за коју је $AM + MB$ најмање, а N тачка на l за коју важи да је $AN = BN$. Доказати да A, B, M, N леже на истој кружници.

Решење: Нека је B' тачка симетрична тачки B у односу на l. Тада је M пресечна тачка праве l и праве која пролази кроз A и B', јер за произвољну тачку P на l, различиту од M, важи $AP+PB = AP+PB' > AB' = AM+MB$. Угао AMB је спољашњи угао једнакокраког троугла MBB', па је $\sphericalangle AMB = 2\sphericalangle MBB' = 2\sphericalangle AB'B$. Са друге стране, како је $AN = NB = NB'$, тачка N је центар описане кружнице око троугла ABB', па је $\sphericalangle ANB =$

$2\sphericalangle ABB'$ (централни угао је два пута већи од периферијског) одакле је $\sphericalangle ANB = \sphericalangle AMB$, па тачке A, B, M, N леже на једној кружници.



Слика 2.

3. Који је већи од следећа два сложена разломка? Образложити одговор!

$$A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \ddots + \cfrac{1}{2006 + \cfrac{1}{2007}}}}}$$

$$B = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \ddots + \cfrac{1}{2005 + \cfrac{1}{2006}}}}}.$$

Решење: Разломак $R = X + \frac{1}{Y}$, где су X и Y позитивни реални бројеви, повећа се (смањи) ако се X повећа (смањи) односно смањи (повећа) ако се Y повећа (смањи). Применом овог правила два пута закључујемо да се разломак

$$X + \cfrac{1}{Y + \cfrac{1}{Z}}$$

повећа (смањи) ако се Z смањи (повећа). Сличним расуђивањем закључујемо да се разломак

$$X + \frac{1}{Y + \frac{1}{Z + \frac{1}{D}}}$$

смањи (порасте) ако D порасте (смањи се). Настављањем овог расуђивања, тј. стављањем $D + \frac{1}{T}$ уместо D у последњем разломку итд. долазимо до општег правила:

- Број "на непарном месту" (тј. на месту где стоје бројеви $1, 3, 5, \ldots, 2005$ у разломку B) својим растом повећава, а број "на парном месту" (тј. на месту где стоје бројеви $2, 4, 6, \ldots, 2006$ у разломку B) својим растом смањује полазни сложени разломак.

Закључак:

$$A < B.$$

4. Одредити све могуће вредности реалног параметра a, за које једначина

$$\frac{(a-1)x^2 + ax + a - 1}{x+3} = 0$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

Решење: У случају када је $a = 1$ имамо јединствено решење $x = 0$. У случају када је $a \neq 1$ једначина ће имати јединствено решење када је дискриминанта квадратне једначине $(a-1)x^2 + ax + a - 1 = 0$ једнака нули (уз услов да је $x \neq 3$), одакле добијамо да a задовољава квадратну једначину $-3a^2 + 8a - 4 = 0$, чија решења су $a = 2$ и $a = \frac{2}{3}$. У првом случају је решење $x = -1$, а у другом случају $x = 1$. Полазна једначина ће имати јединствено решење и у случају када је $x = -3$ корен квадратног тринома $(a-1)x^2 + ax + a - 1$ (јер $x = -3$ није решење полазне једначине). Тада добијамо да је $a = \frac{10}{7}$. У том случају јединствено решење је $x = -\frac{1}{3}$. Дакле полазна једначина ће имати јединствено решење у случају када $a \in \{\frac{2}{3}, 1, \frac{10}{7}, 2\}$.

5. Нека су прва четири члана низа бројеви $1, 9, 9, 3,$ док се сваки следећи члан добија као остатак при дељењу са 10 збира претходна четири члана $(1, 9, 9, 3, 2, 3, 7, \ldots)$. Доказати да ће се у том низу поново, пре или касније, појавити четворка $1, 9, 9, 3$. Да ли ће се у том низу појавити и четворка $7, 3, 6, 7$?

M567

Решење: Напишимо неколико узастопних четворки из нашег низа

$$(*) \qquad 1,9,9,3 \quad 9,9,3,2 \quad 9,3,2,3 \quad 3,2,3,7 \quad 2,3,7,5 \quad \ldots.$$

Како постоји 10^4 могућих четворки једноцифрених бројева, међу 10001-ном четворком из низа $(*)$ сигурно имамо понављање! Другим речима низ четворки $(*)$ се после неког тренутка периодично понавља! Одавде не следи директно да ће се обавезно поново појавити четворка $1, 9, 9, 3$!

Кључно додатно опажање је да се, уз поштовање услова једноцифрености, полазни низ може једнозначно реконструисати и уназад. Нпр. ако потражимо једноцифрен број x такав да важи

$$x+1+9+9 \quad \text{при дељењу са 10 даје остатак} \quad 3$$

лако се налази да је $x=4$. У општем случају, ако су a,b,c,d једноцифрени бројеви, онда постоји јединствен једноцифрен број x такав да

$$x+a+b+c \quad \text{при дељењу са 10 даје остатак} \quad d.$$

Из наведеног се закључује да је низ $(*)$ периодичан на обе стране, дакле четворка $1,9,9,3$ се обавезно појављује у том периоду.

Претпостављајући да се четворка $7,3,6,7$ појављује у нашем низу, одредимо неколико следећих чланова низа. Добијамо

$$(**) \qquad \mathbf{7},\mathbf{3},\mathbf{6},\mathbf{7},3,9,5,4,\mathbf{1},\mathbf{9},\mathbf{9},\mathbf{3},2,3,7,\ldots$$

Појава четворке $1,9,9,3$ гарантује да се овде ради о истом низу $(*)$ па закључујемо (периодичност) да ће се и четворка $7,3,6,7$ у њему поново појавити.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – А категорија

1. Једнакокраки трапез чија је висина 12, крак 13, а средња линија 15, ротира око своје краће основице. Израчунати запремину добијеног обртног тела.

Тангента 41/1, стр. 27.

Решење: По претпоставци

$$\frac{a+b}{2} = 15, \quad h = 12, \quad c = 13,$$

где су a и b основице, h висина а c дужина крака трапеза. Из Питагорине теореме следи да је $\frac{a-b}{2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ одакле се лако налази да је $a = 20$ и $b = 10$.

Тражена запремина је $V = V_1 - 2V_2$ где је V_1 запремина ваљка са полупречником основе $h = 12$ и висином $a = 20$ а V_2 запремина купе са полупречником основе $h = 12$ и висином $\frac{a-b}{2} = 5$. Дакле тражена запремина је

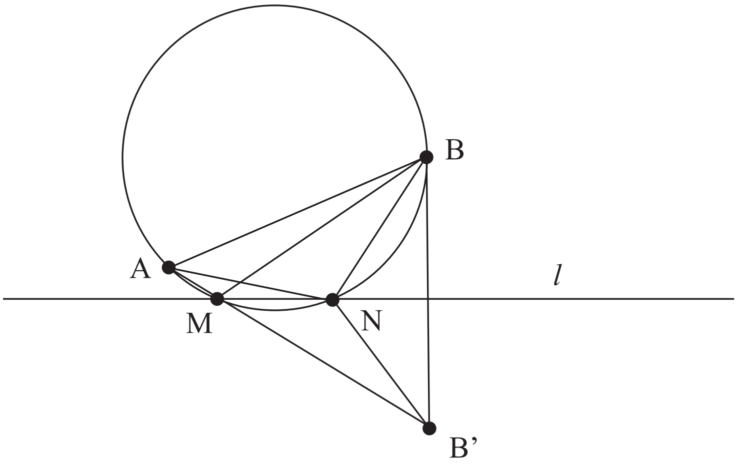
$$V = V_1 - 2V_2 = 12^2\pi 20 - \frac{2}{3}12^2\pi 5 = 2400\pi.$$

2. Доказати да ни за један природан број n, број $3^{3^n}+1$ није дељив са 41.

Решење: Директно се утврђује да је $3^1 \equiv_{41} 3$, $3^2 \equiv_{41} 9$, $3^3 \equiv_{41} 27$, $3^4 \equiv_{41} 40$, $3^5 \equiv_{41} 38$, $3^6 \equiv_{41} 32$, $3^7 \equiv_{41} 14$, $3^8 \equiv_{41} 1$. Дакле $3^{3^n} \equiv_{41} -1$ је еквивалентно са $3^n \equiv_8 4$. Међутим, последња конгруенција је очигледно немогућа, јер је 3^n непаран број.

3. У равни су задати права l и тачке A и B са исте стране l. Нека је M тачка на l за коју је $AM + MB$ најмање, а N тачка на l за коју важи да је $AN = BN$. Доказати да A, B, M, N леже на истом кругу.

Решење: Нека је B' тачка симетрична тачки B у односу на l. Тада је M пресечна тачка праве l и праве која пролази кроз A и B', јер за произвољну тачку P на l, различиту од M, важи $AP+PB = AP+PB' > AB' = AM+MB$. Угао AMB је спољашњи угао једнакокраког троугла MBB', па је $\sphericalangle AMB = 2\sphericalangle MBB' = 2\sphericalangle AB'B$. Са друге стране, како је $AN = NB = NB'$, тачка N је центар описане кружнице око троугла ABB', па је $\sphericalangle ANB = 2\sphericalangle ABB'$ (централни угао је два пута већи од периферијског) одакле је $\sphericalangle ANB = \sphericalangle AMB$, па тачке A, B, M, N леже на једној кружници.



Слика 3.

4. Једначина $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.

Тангента 41/1, стр. 29.

Решење: Из услова да су реални и имагинарни део решења једнаки закључујемо да оно има облик $z = t(1+i)$ где је t реалан број који треба одредити. Приметимо да је

$$(1+i)^2 = 2i \quad (1+i)^3 = -2+2i \qquad (1+i)^4 = -4$$

што се може установити или директним степеновањем или налажењем тригонометријског облика броја $1+i$.

Заменом у полазној једначини добијамо

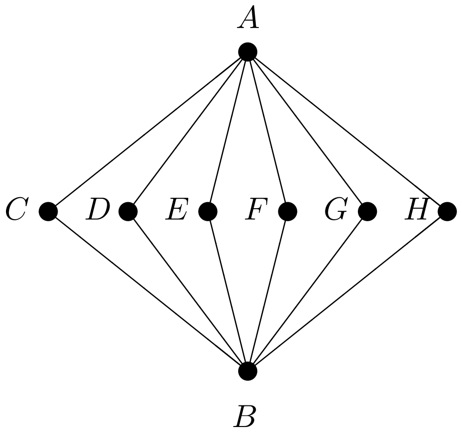
$$(*) \qquad -4t^4 + (-2+2i)t^3 + 4it^2 + 2(1+i)t + 4 = 0.$$

Пошто је t реалан број, ова једначина је еквивалетна пару једначина које се добију ако се реални и имагинарни део леве стране једначине $(*)$ изједначе са нулом. Имагинарни део једначине $(*)$ је једначина

$$2t^3 + 4t^2 + 2t = 0 \text{ тј. } t(t+1)^2 = 0$$

па пошто $z = 0$ није решење полазне једначине закључујемо да је $t = -1$ тј. $z = -1 - i$.

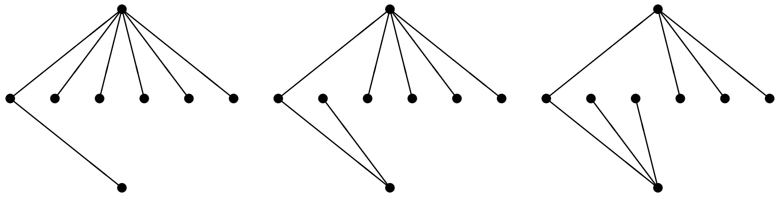
5. На следећој слици је представљено 8 градова (A, B, C, D, E, F, G, H) који могу бити повезани са 12 путева $(AC, AD, AE, AF, AG, AH, BC, BD, BE, BF, BG, BH)$.



а) Који је најмањи број асфалтних путева (од тих 12) потребно изградити тако да се из сваког града може стићи у било који други асфалтним путевима?
б) Одредити број различитих начина да се они повежу минималним бројем асфалтних путева (од тих 12), тако да се из сваког града може стићи у било који други асфалтним путевима.

Решење: **а)** Изградњом првог асфалтног пута смо повезали 2 града. Надаље, додавањем сваког новог асфалтираног пута (из неког града који је већ повезан асфалтираним путем), повезујемо још (највише) 1 град са онима који су претходно били повезани. Стога понављањем овог поступка датих 8 градова можемо повезати са бар 7 асфалтираних путева.

Потребно је још показати да је то и могуће урадити са 7 путева (да бисмо показали да је тај минималан број асфалтираних путева баш једнак 7). То можемо урадити на више начина (колико одређујемо у делу под б). Неки од њих су представљени на следећој слици:



б) Градови A и B могу бити спојени путем дужине 2 преко било ког од градова C, D, E, F, G, H и тај град W можемо изабрати на $\binom{6}{1} = 6$ начина. За сваки од преосталих 5 градова (из скупа $\{C, D, E, F, G, H\} \setminus \{W\}$) имамо 2 могућности: или је спојен са градом A или са B. То нам даје $\binom{6}{1} \cdot 2^5 = 192$ различитих начина да асфалтираним путевима повежемо све градове.
Напомена: У Теорији графова се структура у делу под а) назива стабло графа и оно за граф са n чворова увек има $n-1$ грану (позната чињеница која се може користити), док је у делу под б) одређиван број разапињућих стабала за који постоји посебна теорија.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – А категорија

1. Једначина $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.

Тангента 41/1, стр. 29.

Решење: Из услова да су реални и имагинарни део решења једнаки закључујемо да оно има облик $z = t(1+i)$ где је t реалан број који треба одредити. Приметимо да је

$$(1+i)^2 = 2i \quad (1+i)^3 = -2+2i \qquad (1+i)^4 = -4$$

што се може установити или директним степеновањем или налажењем тригонометријског облика броја $1+i$.

Заменом у полазној једначини добијамо

$$(*) \qquad -4t^4 + (-2+2i)t^3 + 4it^2 + 2(1+i)t + 4 = 0.$$

Пошто је t реалан број, ова једначина је еквивалетна пару једначина које се добију ако се реални и имагинарни део леве стране једначине $(*)$ изједначе са нулом. Имагинарни део једначине $(*)$ је једначина

$$2t^3 + 4t^2 + 2t = 0 \text{ тј. } t(t+1)^2 = 0$$

па пошто $z = 0$ није решење полазне једначине закључујемо да је $t = -1$ тј. $z = -1 - i$.

2. Одредити максималну вредност функције

$$f(x) = \bigl|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\bigr|$$

за $x \in [3,4]$.

M417

Решење 1: Јасно, због $x \in [3,4]$,

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(4-x)(5-x)(6-x)(7-x).$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, имамо да је

$$\frac{x+(7-x)}{2} \geqslant \sqrt{x(7-x)}, \quad \text{тј.} \quad x(7-x) \leqslant \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Слично добијамо да је

$$(x-1)(6-x) \leqslant \left(\frac{5}{2}\right)^2, \quad (x-2)(5-x) \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad (x-3)(4-x) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Једнакост у свим случајевима важи само у случају када је $x = \frac{7}{2} \in [3,4]$ (једначине $x = 7-x$, $x-1 = 6-x$, $x-2 = 5-x$, $x-3 = 4-x$ су еквивалентне). Дакле,

$$\max\left\{f(x) \mid x \in [3,4]\right\} = f\left(\frac{7}{2}\right) = 3^2 5^2 7^2 2^{-8} = \frac{11025}{256}.$$

Решење 2: Функција $f(x)$ је позитивана на интервалу $(3,4)$ (и важи $f(3) = f(4) = 0$) па се место њеног максимума поклапа са местом максимума функције $g(x) = \log f(x)$ (овде се користи строга монотоност логаритамске функције). Уочимо да је

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{4-x} - \frac{1}{5-x} - \frac{1}{6-x} - \frac{1}{7-x}.$$

Функција $g'(x)$ је строго опадајућа у интервалу $(3,4)$ јер су сви сабирци строго опадајући у наведеном интервалу. Ово се може проверити и налажењем извода те функције $g''(x) =$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{(4-x)^2} - \frac{1}{(5-x)^2} - \frac{1}{(6-x)^2} - \frac{1}{(7-x)^2}.$$

Лако се провери да је $g'(\frac{7}{2}) = 0$ па закључујемо да функција $g(x)$ па тиме и функција $f(x)$ достиже свој максимум у тачки $x = \frac{7}{2}$ итд.

3. Који правоугли троугао обима $2+\sqrt{2}$ има највећи полупречник уписане кружнице.

Решење: Нека су a и b катете, c хипотенуза и r полупречник уписане кружнице правоуглог троугла. Користећи познату формулу за полупречник уписане кружнице правоуглог троугла, $r = \frac{a+b-c}{2}$, добијамо

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - c.$$

Одредимо сада најмању могућу вредност за c. Из неједнакости квадратне и аритметичке средине, уз коришћење Питагорине теореме, налазимо да је

$$\frac{2+\sqrt{2}-c}{2} = \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

одакле је $c \geq \sqrt{2}$. Зато је $r = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - c \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Овим смо доказали да полупречник уписане кружнице није већи од $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Та вредност се достиже акко у наведеној неједнакости важи знак једнакости, односно акко је $a = b$. Одавде лако налазимо да највећи могући полупречник уписане кружнице, међу правоуглим троугловима са обимом $2+\sqrt{2}$, има правоугли троугао чије су катете $a = b = 1$, а хипотенуза $c = \sqrt{2}$.

4. Нека су A, B, C и D четири произвољне тачке у простору.

a) Доказати да је: $2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}$.

b) Израчунати угао између дијагонала AC и BD (просторног) четвороугла $ABCD$ ако је $AB = 11$, $BC = 13$, $CD = 8$ и $DA = 4$.

Напомена: Дијагонала просторног полигона је свака дуж која спаја нека два несуседна темена.

Решење:

a)

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}\\
&= (\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\\
&\quad - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}\\
&= 2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})\\
&\quad + \overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}) - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}\\
&= 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}
\end{aligned}$$

Алтернативно, могуће је идентитет проверити тако што се сви вектори изразе преко вектора $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{AC} = v$ и $\overrightarrow{AD} = w$.

b) Користећи једнакост **a)** имамо

$$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 13^2 + 4^2 - 11^2 - 8^2 = 0$$

па закључујемо да је угао имеђу дијагонала прав.

Напомена: Приметимо да има много просторних четвороуглова $ABCD$ који задовољавају услов под **b)** али да сви они имају ортогоналне дијагонале!

5. Одредити све полиноме $P \in \mathbb{R}[x]$ за које важи

$$P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x), \text{ за свако } x \in \mathbb{R}$$

Решење: Претпоставимо да полином $P(x)$ није идентички једнак нули ($P(x) \equiv 0$ тривијално задовољава задану једначину). Како је $P(x^2)$ парна функција, мора бити и полином са десне стране парна функција, дакле полином $P(x)$ садржи само парне степене од x. Нека је $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + ... + a_2x^2 + a_0$ уз претпоставку да је $a_{2n} \neq 0$. Заменом у полазну једначину добијамо да је водећи члан у полиному са леве стране $a_{2n}x^{4n}$, а са десне стране $a_{2n}x^{2n+4}$. Изједначавањем тих израза добијамо да је $n = 2$. Дакле полином је облика $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Заменом тог полинома у полазну једначину и изједначавањем коефицијената уз исте степене добијамо да је $c = 0$, $b = -a$. Дакле решење су полиноми облика $P(x) = a(x^4 - x^2)$, где је $a \in \mathbb{R}$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – Б категорија

1. Страница правоугаоника BC два пута је већа од странице AB. Нека је на страници BC задата тачка M тако да су углови $\sphericalangle AMB$ и $\sphericalangle AMD$ једнаки. Израчунати те углове.

Решење: Угао $\sphericalangle BMA = \sphericalangle MAD$ као углови са паралелним крацима. Онда је троугао MAD једнакокрак. Следи да је $MD = AD$. Због услова задатка следи да је $MD = 2CD$. У правоуглом троуглу MCD хипотенуза је два пута већа од катете па је угао $\sphericalangle DMC = 30°$. Одавде следи да је тражени угао 75 степени.

2. Колико има петоцифрених бројева који имају тачно једну цифру 6?

Решење: Нека је прва цифра 6. Тада имамо $p = 1\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 6\ 561$ бројева. Нека сада прва цифра није 6. Она не може бити ни 0, па је можемо изабрати на 8 начина. Цифра 6 се налази на једном од преостала 4 места - то место можемо изабрати на 4 начина. На остала 3 места може бити било која цифра различита од 6 - то место можемо изабрати на $9\cdot 9\cdot 9$ начина. Стога у овом случају имамо $q = 8\cdot 4\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 23\ 328$ бројева. По правилу збира, бројева који задовољавау услове задатка има $p + q = 29\ 889$.

3. Решити систем једначина ($[x]$ је цео део реалног броја x)

$$\begin{aligned} x - y &= 2005 \\ [x] + [y] &= 2007. \end{aligned}$$

M504

Решење: Прву једначину датог система можемо записати и у облику

$$[x] + \{x\} - [y] - \{y\} = 2005,$$

одакле следи $\{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$, тј. $\{x\} = \{y\}$, због $0 \leqslant \{x\}, \{y\} < 1$, па је

$$\begin{aligned} [x] - [y] &= 2005 \\ [x] + [y] &= 2007, \end{aligned}$$

тј. $[x] = 2006$ и $[y] = 1$. Дакле, дати систем има бесконачно много решења и $\mathcal{R} = \{(2006 + \omega, 1 + \omega) \mid 0 \leqslant \omega < 1\}$.

4. Збир цифара броја x једнак је y, а збир цифара броја y једнак је z. Одредити x ако је $x + y + z = 60$.

M404

Решење: Очигледно је x двоцифрен број, тј. $x = 10a + b$, при чему су a и b цифре декадног система и $a \neq 0$. Дакле, $y = a + b$.

Ако је $a+b \leqslant 9$, тада је и $z = a+b$, па је $60 = 10a+b+2(a+b)$, тј. $12a + 3b = 60$, односно $4a + b = 20$. Дакле, у овом случају имамо да $(a, b) \in \{(4, 4), (5, 0)\}$.

Ако је $a + b \geqslant 10$, тада је $z = a + b - 9$, па је $60 = 12a + 3b - 9$, тј. $4a + b = 23$. Решавањем последње једначине добијамо да је $(a, b) = (4, 7)$.

Дакле, $x \in \{44, 47, 50\}$.

5. Одредити две последње цифре броја 9^{9^9}.

M505

Решење: Напишимо последње две цифре свих бројева из низа

$$(*) \qquad 9, 9^2, 9^3, 9^4, 9^5, 9^6, 9^7, 9^8, 9^9, 9^{10}, 9^{11}, 9^{12}, \ldots$$

Узастопним множењем са 9, лако се налази да су то бројеви

$$(**) \qquad 9, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09, 81, \ldots$$

Закључујемо да се последње две цифре понављају са периодом 10 тј. да 9^a и 9^b имају једнаке две последње цифре ако a и b дају исти остатак при дељењу са 10, или другим речима ако a и b имају исту последњу цифру.

Поређењем низова $(*)$ и $(**)$ налазимо да је последња цифра броја 9^9 број 9 па закључујемо да 9^{9^9} и 9^9 имају једнаке последње две цифре. Одавде, поновним упоређивањем низова $(*)$ и $(**)$ налазимо да су тражене цифре 8 и 9.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве $z = x + iy$, за које важи

$$|z| = 1 \quad \text{и} \quad |z - 1 - i| = |z + 1 + i|.$$

Тангента 45/1, стр. 39.

Решење:

$$|x + iy| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$|(x-1)+i(y-1)| = |(x+1)+i(y+1)| \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x + y = 0.$$

Одавде се лако налази да је $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ тј. једини комплексни бројеви са траженим својствима су

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

2. Решити неједначину

$$\frac{x+2}{|3-x|} + \frac{x+2}{x-6} \leq 0.$$

Тангента 44/4, стр. 33.

Решење: Пошто су $\{-2, 3, 6\}$ нуле (тј. места промене знака) полинома $x+2, 3-x, x-6$, природно је дискутовати следеће случајеве:

1. случај: $(x \leq -2)$
Неједначина је у овом случају еквиваletна са

$$\frac{x+2}{3-x} - \frac{x+2}{6-x} \leq 0 \qquad / \cdot (3-x)(6-x)$$

$$(x+2)(6-x) - (x+2)(3-x) \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x + 2 \leq 0.$$

Решење: $x \leq -2$.

2. случај: $(-2 < x < 3)$
Неједначина је у овом случају као и под 1. еквивалетна са

$$\frac{x+2}{3-x} - \frac{x+2}{6-x} \leq 0 \qquad / \cdot (3-x)(6-x)$$

$$(x+2)(6-x) - (x+2)(3-x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -2$$

што значи да под овим условима нема решења.

3. случај: $(3 < x < 6)$
Неједначина је у овом случају еквивалетна са

$$\frac{x+2}{x-3} - \frac{x+2}{6-x} \leq 0 \qquad / \cdot (x-3)(6-x)$$

$$(x+2)(6-x) - (x+2)(x-3) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(9-2x) \leq 0.$$

Решење: $\frac{9}{2} \leq x < 6.$

4. случај: $(6 < x)$
Неједначина је у овом случају еквивалетна са

$$\frac{x+2}{x-3} + \frac{x+2}{x-6} \leq 0 \qquad / \cdot (x-3)(x-6)$$

$$(x+2)(x-6) + (x+2)(x-3) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(2x-9) \leq 0$$

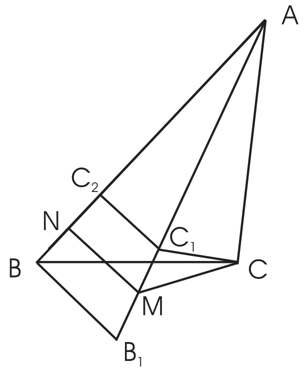
па ни у овом случају нема решења.

Коначно решење: $x \in (-\infty, -2] \cup [\frac{9}{2}, 6)$.

3. На симетрали $\sphericalangle BAC$ троугла ABC уочене су тачке B_1 и C_1 такве да је $BB_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AC$. Нека је M средиште дужи B_1C_1. Доказати да је $MB = MC$.

M539

Решење: Уочимо на правој AB тачке C_2 и N такве да важи $C_1C_2 \perp AB$, $MN \parallel B_1B$ (слика 1). На основу подударности троуглова AC_1C и AC_1C_2 следи да је $C_1C = C_1C_2$. Како је M средиште дужи B_1C_1 и $C_1C_2 \perp AB$ следи да је N средиште дужи BC_2. Стога је висина MN троугла BMC_2 уједно и тежишна дуж, па је тај троугао једнакокрак, тј. $BM = MC_2$. С друге стране, из подударности троуглова MC_1C_2 и MC_1C следи да је $MC = MC_2$. Према томе, $BM = MC_2 = MC$.



Слика 1.

4. Поређати по величини разломке. Образложити одговор!

$$A = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}} \qquad B = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}}} \qquad C = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}}$$

Решење: Разломак $R = X + \dfrac{1}{Y}$, где су X и Y позитивни реални бројеви, повећа се (смањи) ако се X повећа (смањи) односно смањи (повећа) ако се Y повећа (смањи). Применом овог правила два пута закључујемо да разломак

$$X+\cfrac{1}{Y+\cfrac{1}{Z}}$$

порасте (опадне) ако Z порасте (опадне). Сличним расуђивањем закључујемо да разломак

$$X+\frac{1}{Y+\frac{1}{Z+\frac{1}{D}}}$$

опада (расте) ако D расте (опада). Коначно, применом истог аргумента, закључујемо да се разломак ($X, Y, Z, D, T > 0$)

$$(*)\qquad X+\cfrac{1}{Y+\cfrac{1}{Z+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{T}}}}$$

повећа ако се повећа један од бројева X, Z или T а смањи ако се повећа један од бројева Y или D.

Закључак:

$$B < A < C.$$

5. Одредити све могуће вредности реалног параметра a, за које једначина

$$\frac{(a-1)x^2+ax+a-1}{x+3}=0$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

Решење: У случају када је $a = 1$ имамо јединствено решење $x = 0$. У случају када је $a \neq 1$ једначина ће имати јединствено решење када је дискриминанта квадратне једначине $(a-1)x^2 + ax + a - 1 = 0$ једнака нули, одакле добијамо да a задовољава квадратну једначину $-3a^2+8a-4 = 0$, чија решења су $a = 2$ и $a = \frac{2}{3}$. У првом случају је решење $x = -1$, а у другом случају $x = 1$. Полазна једначина ће имати јединствено решење и у случају када је $x = -3$ корен квадратног тринома $(a-1)x^2 + ax + a - 1$ (јер $x = -3$ није решење полазне једначине). Тада добијамо да је $a = \frac{10}{7}$. У том случају јединствено решење је $x = -\frac{1}{3}$. Дакле полазна једначина ће имати јединствено решење у случају када $a \in \{\frac{2}{3}, 1, \frac{10}{7}, 2\}$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – Б категорија

1. Ако је $b = 3^{\frac{1}{1-\log_3 a}}$ и $c = 3^{\frac{1}{1-\log_3 b}}$, доказати да је $a = 3^{\frac{1}{1-\log_3 c}}$.
Тангента 39/3, стр. 40.

Решење: Наведене три једнакости су еквивалентне једнакостима

$$\log_3 b = \frac{1}{1-\log_3 a} \quad \log_3 c = \frac{1}{1-\log_3 b} \quad \log_3 a = \frac{1}{1-\log_3 c}.$$

Трећа једнакост се добије ако се $\log_3 b$ из прве замени у другу једнакост.

Напомена: Приметимо да је тврђење задатка блиско повезано са тврђењем да је $f(f(f(x))) = x$ где је

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

2. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & 2u & = & 1. \end{array}$$

Тангента 38/2, стр. 40.

Решење: Сабирањем једначина добијамо да је $x + y + z + u = \frac{4}{5}$ и даље одузимањем од одговарајућих једначина налази се да је решење система

$$x = y = z = u = \frac{1}{5}.$$

3. Доказати да је

$$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

Решење:

$$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}(\cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{9}) =$$

$$-\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{9} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} = -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \cos\frac{\pi}{9}) = \frac{1}{8}.$$

4. Одредити поредак бројева (сортирати по величини)

$$a = -2^{-2^{2^2}},\ b = -2^{2^{-2^2}},\ c = -2^{2^{2^{-2}}},\ d = 2^{-2^{-2^2}},\ e = 2^{-2^{2^{-2}}},\ f = 2^{2^{-2^{-2}}}.$$

Решење: Користићемо својство да је експоненцијална функција $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, дефинисана са $f(x) = 2^x$, за свако $x \in \mathbb{R}$, строго монотоно растућа. $(*)$

Очигледно су бројеви a, b и c негативни, док су бројеви d, e и f позитивни. Нека је $a_1 = -2^{2^2}$, $b_1 = 2^{-2^2}$ и $c_1 = 2^{2^{-2}}$. Како је $2^{-2} > 0 > -2^2$, то на основу $(*)$, следи $c_1 > b_1$. Како је још и a_1 негативан број, а b_1 и c_1 позитивни, то је $a_1 < b_1 < c_1$, те због $(*)$ важи $|a| < |b| < |c|$. Одавде, имајући на уму да су бројеви a, b и c негативни, добијамо да важи поредак $a > b > c$. Нека је сада $d_1 = -2^{-2^2}$, $e_1 = -2^{2^{-2}}$ и $f_1 = 2^{-2^{-2}}$. Бројеви d_1 и e_1 су негативни, док је број f_1 позитиван. Из $2^{-2} > 0 > -2^2$, по $(*)$ је $|e_1| > |d_1|$, односно $e_1 < d_1$. Закључујемо да је $e_1 < d_1 < f_1$, те користећи $(*)$ још једном, имамо $e < d < f$.

На овај начин смо коначно доказали да је распоред датих бројева $c < b < a < e < d < f$.

5. Нека су прва четири члана низа бројеви $1, 9, 9, 3$, док се сваки следећи члан добија као остатак при дељењу са 10 збира претходна четири члана $(1, 9, 9, 3, 2, 3, 7, \ldots)$. Доказати да ће се у том низу поново, пре или касније, појавити четворка $1, 9, 9, 3$. Да ли ће се у том низу појавити и четворка $7, 3, 6, 7$?

M567

Решење: Напишимо неколико узастопних четворки из нашег низа

$$(*) \qquad 1,9,9,3 \quad 9,9,3,2 \quad 9,3,2,3 \quad 3,2,3,7 \quad 2,3,7,5 \quad \ldots.$$

Како постоји 10^4 могућих четворки једноцифрених бројева, међу 10001-ном четворком из низа $(*)$ сигурно имамо понављање! Другим речима низ четворки $(*)$ се после неког тренутка периодично понавља! Одавде не следи директно да ће се обавезно поново појавити четворка $1, 9, 9, 3$!

Кључно додатно опажање је да се, уз поштовање услова једноцифрености, полазни низ може једнозначно реконструисати и уназад. Нпр. ако потражимо једноцифрен број x такав да важи

$$x + 1 + 9 + 9 \quad \text{при дељењу са 10 даје остатак} \quad 3$$

лако се налази да је $x = 4$. У општем случају, ако су a, b, c, d једноцифрени бројеви, онда постоји јединствен једноцифрен број x такав да

$$x + a + b + c \quad \text{при дељењу са 10 даје остатак} \quad d.$$

Из наведеног се закључује да је низ $(*)$ периодичан на обе стране, дакле четворка $1, 9, 9, 3$ се обавезно појављује у том периоду.

Претпостављајући да се четворка $7, 3, 6, 7$ појављује у нашем низу, одредимо неколико следећих чланова низа. Добијамо

$$(**) \qquad \mathbf{7}, \mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, 3, 9, 5, 4, \mathbf{1}, \mathbf{9}, \mathbf{9}, \mathbf{3}, 2, 3, 7, \ldots$$

Појава четворке $1, 9, 9, 3$ гарантује да се овде ради о истом низу па закључујемо (периодичност) да ће се и четворка $7, 3, 6, 7$ у њему поново појавити.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да се полином $P(x) = x^8+x^6+x^4+x^2+1$ може написати као производ два неконстантна полинома чији коефицијенти су цели бројеви.

Решење: Коришћењем познатог идентитета

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

добијамо

$$P(x) = \frac{x^{10}-1}{x^2-1} = \frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^5+1}{x+1} = (x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

Приметимо да се горњим аргументом доказује једнакост полинома

$$(*) \qquad P(x) = (x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

уз услов $x \notin \{-1, +1\}$. Другим речима једнакост $(*)$ ће бити потпуно доказана тек ако се још и непосредно провери за $x = -1$ и $x = 1$.

2. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x &+& y &+& z &+& u &=& 1\\ x &+& 2y &+& z &+& u &=& 1\\ x &+& y &+& 2z &+& u &=& 1\\ x &+& y &+& z &+& 2u &=& 1. \end{array}$$

Тангента 38/2, стр. 40.

Решење: Сабирањем једначина добијамо да је $x+y+z+u = \frac{4}{5}$ и даље одузимањем од одговарајућих једначина налази се да је решење система

$$x = y = z = u = \frac{1}{5}.$$

3. Једначина $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.

Тангента 41/1, стр. 29.

Решење: Из услова да су реални и имагинарни део решења једнаки закључујемо да оно има облик $z = t(1+i)$ где је t реалан број који треба одредити. Приметимо да је

$$(1+i)^2 = 2i \quad (1+i)^3 = -2+2i \qquad (1+i)^4 = -4$$

што се може установити или директним степеновањем или налажењем тригонометријског облика броја $1+i$.

Заменом у полазној једначини добијамо

$$(*)\qquad -4t^4+(-2+2i)t^3+4it^2+2(1+i)t+4=0.$$

Пошто је t реалан број, ова једначина је еквивалетна пару једначина које се добију ако се реални и имагинарни део леве стране једначине $(*)$ изједначе са нулом. Имагинарни део једначине $(*)$ је једначина

$$2t^3+4t^2+2t=0 \text{ тј. } t(t+1)^2=0$$

па пошто $z=0$ није решење полазне једначине закључујемо да је $t=-1$ тј. $z=-1-i$.

4. Одредити максималну вредност функције

$$f(x)=\big|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\big|$$

за $x\in[3,4]$.

M417

Решење 1: Јасно, због $x\in[3,4]$,

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(4-x)(5-x)(6-x)(7-x).$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, имамо да је

$$\frac{x+(7-x)}{2}\geqslant\sqrt{x(7-x)},\quad \text{тј.}\quad x(7-x)\leqslant\left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Слично добијамо да је

$$(x-1)(6-x)\leqslant\left(\frac{5}{2}\right)^2,\quad (x-2)(5-x)\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^2\quad \text{и}\quad (x-3)(4-x)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Једнакост у свим случајевима важи само у случају када је $x=\frac{7}{2}\in[3,4]$ (једначине $x=7-x$, $x-1=6-x$, $x-2=5-x$, $x-3=4-x$ су еквивалентне). Дакле,

$$\max\big\{f(x)\mid x\in[3,4]\big\}=f\left(\frac{7}{2}\right)=3^25^27^22^{-8}=\frac{11025}{256}.$$

Решење 2: Функција $f(x)$ је позитивана на интервалу $(3,4)$ (и важи $f(3)=f(4)=0$) па се место њеног максимума поклапа са местом максимума функције $g(x)=\log f(x)$ (овде се користи строга монотоност логаритамске функције). Уочимо да је

$$g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{4-x}-\frac{1}{5-x}-\frac{1}{6-x}-\frac{1}{7-x}.$$

Функција $g'(x)$ је строго опадајућа у интервалу $(3,4)$ јер су сви сабирци строго опадајући у наведеном интервалу. Ово се може проверити и налажењем извода те функције $g''(x) =$

$$-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{1}{(4-x)^2}-\frac{1}{(5-x)^2}-\frac{1}{(6-x)^2}-\frac{1}{(7-x)^2}.$$

Лако се провери да је $g'(\frac{7}{2}) = 0$ па закључујемо да функција $g(x)$ па тиме и функција $f(x)$ достиже свој максимум у тачки $x = \frac{7}{2}$.

5. Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ аритметички низ реалних бројева.

(a) Ако за неке природне бројеве m и n важи $\frac{a_{2m}}{a_{2n}} = -1$, доказати да овај аритметички низ садржи бар један цео број.

(b) Ако за неке природне бројеве m и n важи $\frac{a_m}{a_n} = -1$, да ли се у овом аритметичком низу обавезно мора наћи бар један рационалан број?

Решење:

(a) Претпоставимо без умањења општости да је $m < n$. Из услова задатка добијамо да је $a_{2m} + a_{2n} = 0$. Нека је d разлика аритметичког низа. Тада имамо да је $a_{m+n} = a_{2m} + (m-n)d$ и такође $a_{m+n} = a_{2n} + (n-m)d$, па сабирањем те две једнакости добијамо $2a_{m+n} = a_{2m} + a_{2n} = 0$, па је члан аритметичког низа $a_{m+n} = 0$, дакле цео број.

(b) Не мора! На пример нека је $a_1 = -\sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2}, a_3 = 3\sqrt{2}$, итд. (тачније нека је $a_k = (2k-3)\sqrt{2},\ k \in \mathbb{N}$) Низ a_k је очигледно аритметички и сви чланови су ирационални, а $\frac{a_1}{a_2} = -1$.