Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2007.

Први разред – А категорија

1. Аутомобил креће из места A константном брзином по правом путу. Сваких 15 минута ауто скрене под углом од 90 степени лево или десно. Доказати да се ауто може вратити у место A само после целог броја сати.

2. Решити систем једначина ($[x]$ је цео део реалног броја x)

$$\begin{aligned} x - y &= 2005 \\ [x] + [y] &= 2007. \end{aligned}$$

3. На симетрали $\sphericalangle BAC$ троугла ABC уочене су тачке B_1 и C_1 такве да је $BB_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AC$. Нека је M средиште дужи B_1C_1. Доказати да је $MB = MC$.

4. За природне бројеве a, b и c важи $a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} = \frac{4016}{2007}$. Доказати да је $\frac{1}{c+\frac{1}{b+\frac{1}{a}}} = \frac{2007}{4016}$.

5. Одредити на колико начина можемо факторисати број 441000 на два фактора m и n, тако да је $m > 1$, $n > 1$, и НЗД$(m, n) = 1$, при чему редослед фактора није битан (тј. производи $m \cdot n$ и $n \cdot m$ представљају исто факторисање).

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2007.

Први разред – Б категорија

1. Страница правоугаоника BC два пута је већа од странице AB. Нека је на страници BC задата тачка M тако да су углови $\sphericalangle AMB$ и $\sphericalangle AMD$ једнаки. Израчунати те углове.

2. Колико има петоцифрених бројева који имају тачно једну цифру 6?

3. Решити систем једначина ($[x]$ је цео део реалног броја x)

$$\begin{aligned} x - y &= 2005 \\ [x] + [y] &= 2007. \end{aligned}$$

4. Збир цифара броја x једнак је y, а збир цифара броја y једнак је z. Одредити x ако је $x + y + z = 60$.

5. Одредити две последње цифре броја 9^{9^9}.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2007.

Други разред – А категорија

1. Одредити скуп свих тачака комплексне равни које задовољавају

$$|\frac{1}{z} - i| \leqslant 1.$$

2. У равни су задати права l и тачке A и B са исте стране l. Нека је M тачка на l за коју је $AM + MB$ најмање, а N тачка на l за коју важи да је $AN = BN$. Доказати да A, B, M, N леже на истом кругу.

3. Који је већи од следећа два сложена разломка? Образложити одговор!

$$A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \ddots + \cfrac{1}{2006 + \cfrac{1}{2007}}}}} \qquad B = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \ddots + \cfrac{1}{2005 + \cfrac{1}{2006}}}}}$$

4. Одредити све могуће вредности реалног параметра a, за које једначина

$$\frac{(a-1)x^2 + ax + a - 1}{x+3} = 0$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

5. Нека су прва четири члана низа бројеви $1, 9, 9, 3$, док се сваки следећи члан добија као остатак при дељењу са 10 збира претходна четири члана $(1, 9, 9, 3, 2, 3, 7, \ldots)$. Доказати да ће се у том низу поново, пре или касније, појавити четворка $1, 9, 9, 3$. Да ли ће се у том низу појавити и четворка $7, 3, 6, 7$?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2007.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве $z = x + iy$, за које важи

$$|z| = 1 \quad \text{и} \quad |z - 1 - i| = |z + 1 + i|.$$

2. Решити неједначину

$$\frac{x+2}{|3-x|} + \frac{x+2}{x-6} \leq 0.$$

3. На симетрали $\sphericalangle BAC$ троугла ABC уочене су тачке B_1 и C_1 такве да је $BB_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AC$. Нека је M средиште дужи B_1C_1. Доказати да је $MB = MC$.

4. Поређати по величини разломке. Образложити одговор!

$$A = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}} \qquad B = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}}} \qquad C = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}}$$

5. Одредити све могуће вредности реалног параметра a за које једначина

$$\frac{(a-1)x^2 + ax + a - 1}{x+3} = 0$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2007.

Трећи разред – А категорија

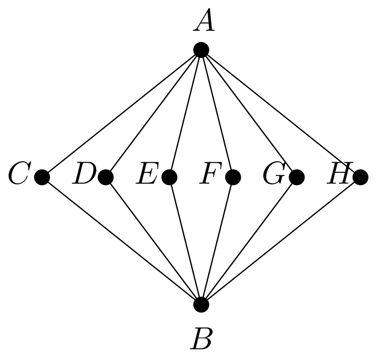
1. Једнакокраки трапез чија је висина 12, крак 13, а средња линија 15, ротира око своје краће основице. Израчунати запремину добијеног обртног тела.

2. Доказати да ни за један природан број n, број $3^{3^n}+1$ није дељив са 41.

3. У равни су задати права l и тачке A и B са исте стране l. Нека је M тачка на l за коју је $AM + MB$ најмање, а N тачка на l за коју важи да је $AN = BN$. Доказати да A, B, M, N леже на истом кругу.

4. Једначина $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.

5. На следећој слици је представљено 8 градова (A, B, C, D, E, F, G, H) који могу бити повезани са 12 путева $(AC, AD, AE, AF, AG, AH, BC, BD, BE, BF, BG, BH)$.



а) Који је најмањи број асфалтних путева (од тих 12) потребно изградити тако да се из сваког града може стићи у било који други асфалтним путевима?
б) Одредити број различитих начина да се они повежу минималним бројем асфалтних путева (од тих 12), тако да се из сваког града може стићи у било који други асфалтним путевима.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2007.

Трећи разред – Б категорија

1. Ако је $b = 3^{\frac{1}{1-\log_3 a}}$ и $c = 3^{\frac{1}{1-\log_3 b}}$, доказати да је $a = 3^{\frac{1}{1-\log_3 c}}$.

2. Решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & 2u & = & 1. \end{array}$$

3. Доказати да је

$$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

4. Одредити (уз образложење) поредак бројева (поређати их у растућем поретку)

$a = -2^{-2^{2^2}}$, $b = -2^{2^{-2^2}}$, $c = -2^{2^{2^{-2}}}$, $d = 2^{-2^{-2^2}}$, $e = 2^{-2^{2^{-2}}}$, $f = 2^{2^{-2^{-2}}}$.

5. Нека су прва четири члана низа бројеви $1, 9, 9, 3$, док се сваки следећи члан добија као остатак при дељењу са 10 збира претходна четири члана $(1, 9, 9, 3, 2, 3, 7, \ldots)$. Доказати да ће се у том низу поново, пре или касније, појавити четворка $1, 9, 9, 3$. Да ли ће се у том низу појавити и четворка $7, 3, 6, 7$?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2007.

Четврти разред – А категорија

1. Једначина $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.

2. Одредити максималну вредност функције

$$f(x) = \left|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\right|$$

за $x \in [3, 4]$.

3. Који правоугли троугао обима $2 + \sqrt{2}$ има највећи полупречник уписане кружнице.

4. Нека су A, B, C и D четири произвољне тачке у простору.

a) Доказати да је: $2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC}$.

b) Израчунати угао између дијагонала AC и BD (просторног) четвороугла $ABCD$ ако је $AB = 11$, $BC = 13$, $CD = 8$ и $DA = 4$.

Напомена: Дијагонала просторног полигона је свака дуж која спаја нека два несуседна темена.

5. Одредити све полиноме $P \in \mathbb{R}[x]$ за које важи

$$P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x), \text{ за свако } x \in \mathbb{R}$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2007.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да се полином $P(x) = x^8+x^6+x^4+x^2+1$ може написати као производ два неконстантна полинома чији коефицијенти су цели.

2. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & 2u & = & 1. \end{array}$$

3. Једначина $z^4+z^3+2z^2+2z+4=0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.

4. Одредити максималну вредност функције

$$f(x) = \left|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\right|$$

за $x \in [3,4]$.

5. Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ аритметички низ реалних бројева.

(a) Ако за неке природне бројеве m и n важи $\frac{a_{2m}}{a_{2n}} = -1$, доказати да овај аритметички низ садржи бар један цео број.

(b) Ако за неке природне бројеве m и n важи $\frac{a_m}{a_n} = -1$, да ли се у овом аритметичком низу обавезно мора наћи бар један рационалан број?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.