Трећи сусрет и такмичење ученика и студената ``Наука и друштво``

Турну Северин – Румунија, 15-17 април 2011.

Категорија XI

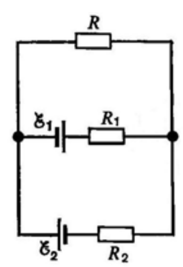
1. A slightly divergent beam of non-relativistic charged particles, accelerated by a potential difference U, propagates from a point A along the axis of a stright solenoid. The beam is brought into focus at a distance ℓ from the point A at two successive values of magnetic induction B_1 and B_2. Find the specific charge q/m of the particles.

Solution

The charged particles will traverse a helical trajectory and will be focused on the axis after a number of turns. Thus $\ell / v_0 \approx n.(2\pi m/qB_1) = (n+1)(2\pi m/qB_2)$. So $n/B_1 = (n+1)/B_2 = 1/(B_2 - B_1)$. Hence
$\ell / v_0 \approx (2\pi m/q)[1/(B_2 - B_1)]$, with $v_0 = \sqrt{2qU/m}$. At the end $q/m = 8\pi^2 U / [\ell(B_2 - B_1)]^2$.

2. A. Two identical metallic balls of radius a are placed in a homogeneous poorly conducting medium with resistivity ρ. Find the resistence of the medium between the balls under the condition that the distance between them is much larger than their size.

B. Find in analytical form the magnitude and direction of the current passing through the resistor R in the circuit shown in figure. All resistances and e.m.f. 's are assumed to be known.
Numerical applications : a). $\in_1 = 6V,\ \in_2 = 4{,}5V,\ R = 2k\Omega,\ R_1 = R_2 = 0{,}5k\Omega$;
b). $\in_1 = 8V,\ \in_2 = 12V,\ R = 3k\Omega,\ R_1 = R_2 = 0{,}75k\Omega$.



Solutions

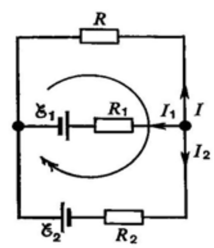
A. Let us mentally impart charges $+q$ and $-q$ to the two balls. Since the balls are at a large distance from one another, electric field near the surface of each ball is practically determined only by the charge of the nearest sphere, and its charge can be considered to be uniformly distributed over the surface. Surrounding the positively charged ball by a concentric sphere adjoining directly the ball's surface, we write the expression for the current through this sphere $I = 4\pi a^2 j$, where j is the current density. Using Ohm's law, $j = E/\rho$, and the formula $E = q/4\pi\varepsilon_0 a^2$ for the intensity of the electric field, we obtain $I = q/\rho\varepsilon_0$.

Let us now find the potential difference between the balls $U = \varphi_+ - \varphi_- \approx 2q / 4\pi\varepsilon_0 a.$ The sought resistence is given by $R = U / I = \rho / 2\pi a.$ This resultis valid regardless of the magnitude of the dielectric constant of the medium.

B. From the relations

$I + I_1 + I_2 = 0$, $-IR + I_1R_1 = -\in_1$ and $-IR + I_2R_2 = +\in_2$ we find

$I = \dfrac{\in_1 R_2 - \in_2 R_1}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}$.



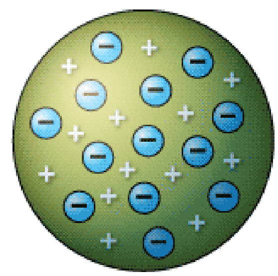
Then $I_1 = -\dfrac{\in_1 R_2 + R(\in_1 + \in_2)}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}$, $I_2 = \dfrac{\in_2 R_1 + R(\in_1 + \in_2)}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}$.

Numerical application:

a). $I \approx 0{,}44mA,\quad I_1 \approx -10{,}22mA,\quad I_2 \approx 9{,}78mA.$

b). $I \approx -0{,}59mA,\quad I_1 \approx -13{,}04mA,\quad I_2 \approx 13{,}63mA.$

3. Томсон је 1906. године поставио модел атома који се популарно назива «пудинг са сувим грожђем» према коме су негативни електрони уроњени у простор непрекдино распоређеног позитивног наелектрисања чија маса представља већи део масе атома. Атом водоника је, према овом моделу, лопта полупречника R=10^{-10} m, наелектрисања Q=+e=1,6×10^{-19} C, са једним електроном унутар ње наелектрисања –e, масе m_e=9,1×10^{-31} kg, који се, у нормалним околностима налази у центру позитивно наелектрисане лопте. Претпоставимо да је електрон некако померен на неко мало растојање r_0 од центра позитивно налектрисане лопте и препуштен сам себи. Колика је фреквенција овог осциловања? Коликој таласној дужини светлости одговара ова фреквенција?



Решење. Полазећи од израза за јачину електричног поља унутар наелектрисане лопте

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \text{ ,(2п)}$$

За силу која делује на електрон (реституциона сила) приликом отклона од равнотежног положаја за r добијамо

$$F = -eE = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \text{ .(2п)}$$

Из једначина кретања

$$m_e a = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \text{ ,(1п)}$$

На основу упоређивања са једначином за мале осцилације, a+ω₀r=0, се лако види да је тражена фреквенција

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}} \text{ .(2п)}$$

Замена бројачаних података за њу даје ω_0=1,6×10^{16}Hz, а њој одговара таласна дужина

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 120nm. (2\text{п})$$

Бонус 1п. Укупно 10 поена.

4. У осцилаторном колу, сачињеном од кондензатора са равним плочама и индуктивног калема занемарљивог активног отпора, одржавају се осцилације чија је енергија *W*. Плоче кондензатора се споро размичу, при чему се фреквенција осцилација повећава *n* пута. Израчунати рад који се при томе изврши.

1. Нека је наелектрисање на плочама кондензатора дато изразом:

$$q = q_m \cos\omega t, \ \ \textbf{(1п.)}$$

где је $\omega = 1/\sqrt{LC}$, где су L и C индуктивност калема и капацитет кондензатора, респективно. Ако је растојање између плоча кондензатора *d*, а њихова површина *S*, биће:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \ \ \Rightarrow \ \ \omega^2 = \frac{d}{\varepsilon_0 SL}. \ \textbf{(1п.)}$$

Видимо да са порастом осцилационе фреквенције *n*пута, растојање између плоча расте n^2 пута, односно расте од почетне вредности d_0 до коначне, $n^2 d_0$. Пад потенцијала на кондензатору је $U = \frac{q_m}{C}\cos\omega t = \frac{dq_m}{\varepsilon_0 S}\cos\omega t$ **(1п.),** док је електрично поље између плоча: $E = \frac{q_m}{\varepsilon_0 S}\cos\omega t.$ **(1п.)** Сила која делује на плочу је $F = qE = \frac{q_m^2}{\varepsilon_0 S}\cos^2\omega t$. **(1п.)** Пошто је ова сила увек позитивна, а плоча се помера споро, средња вредност ове силе је: $\bar{F} = \frac{q_m^2}{2\varepsilon_0 S}$, **(1п.)** а извршени рад: $A = \bar{F}\left(n^2 d_0 - d_0\right) = \left(n^2 - 1\right)\frac{q_m^2 d_0}{2\varepsilon_0 S}$. **(1п.)** Пошто је $\frac{q_m^2 d_0}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_m^2}{2C_0} = W$ **(1п.)** укупна енергија која је у почетном тренутку била „ускладиштена“ у кондензатору, коначно је:

$$A = \left(n^2 - 1\right)W. \ \textbf{(1п.)} \ \ \textbf{Бонус: 1п.}$$

Задатке припремили: Флореа Улиу (Крајова), Љубиша Нешић (Ниш) и Дејан Димитријевић (Ниш).