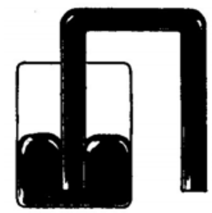
Трећи сусрет и такмичење ученика и студената ``Наука и друштво``

Турну Северин – Румунија, 15-17 април 2011.

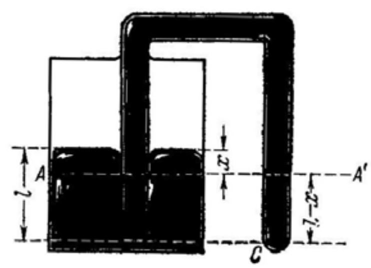
Категорија X

1. A cylindrical vessel is half-filled with mercury and then hermetically sealed by cover through which a siphon tube is passed. The height of the vessel is $2\ell = 60cm.$ The siphon has been filled with mercury in advance, has equal lims and the end of one tube is located at the bottom of the vessel (see the figure). At what pressure in the vessel will the mercury cease to flow through siphon? By how much will the mercury level then have dropped? The external pressure is 750 mm Hg (i.e. torr).



Solution

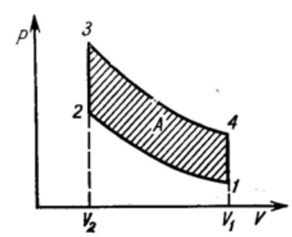
The flow of mercury through the siphon will continue as long as the pressure built up by the mercury at point C inside the tube exceeds the atmospheric pressure.



Assume that the mercury level in the vessel has dropped by x cm and the pressure of the air in the vessel become y cm Hg. The same pressure y will obviuosly be estabilished also in the tube at the level AA', corresponding to the freee surface of the mercury in the vessel. The pressure p_1 produced by the mercury at point C at the exit from the tube will be formed from the pressure y and the pressure of the mercury column $A'C = \ell - x$, i.e. $p_1 = y + \ell - x$. As the mercury level drops in the vessel, the pressure y (and also p_1) will diminish and, at the moment the flow of mercury ceases, p_1 will be equal to p_0 (the atmospheric pressure). Hence, the air pressure in the vessel at this moment will be $y = p_0 - (\ell - x)$ cm Hg.

From the law of Boyle and Mariotte we have $p_0\ell = y(\ell + x)$ or $p_0\ell = [p_0 - (\ell - x)](\ell + x)$. From this equation we can find that $x = 15cm$ and, then, $y = 75 - 15 = 60cm$, i.e. 600 mm Hg.

2. In the figure is depicted an idealized cycle (with perfect gas) of a petrol internal combustion engine. The segment 1-2 corresponds to the adiabatic compression of the combustible mixture; segment 2-3, to the isochoric combustion of fuel in the course of which the working fluid receives an amount of heat Q; segment 3-4 corresponds to the adiabatic expansion of the working fluid; segment 4-1, to the isochoric exhaust of spent gases. Express the engine's efficiency in terms of the gas compression ratio $x = V_2 / V_1$.



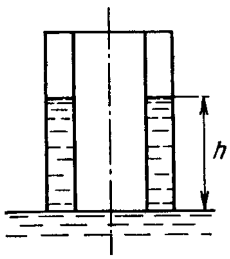
Solution

The efficiency of the cycle is $\eta = W / Q$. The work W is equal to the difference between the work of adiabatic expansion and that of adiabatic compression:

$W = \nu C_V [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)]$. The working medium receives heat in the process of isochoric combustion of fuel $Q = \nu C_V (T_3 - T_2)$. Hence, the efficiency is $\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.

From the relation $TV^{\gamma-1} = const$, applied in the adiabatic processes 1-2 and 3-4, we obtain $T_2 / T_3 = T_1 / T_4$ so that $\eta = 1 - \frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{1 - T_1/T_4}{1 - T_2/T_3} = 1 - \frac{T_4}{T_3}$. But $T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$ and then $T_4 / T_3 = (V_3 / V_4)^{\gamma-1} = (V_2 / V_1)^{\gamma-1} = x^{\gamma-1}$. Hence $\eta = 1 - x^{\gamma-1}$.

3. Цилиндрични кондензатор, везан за извор једносмерног напона *U*, додирује површину воде једним својим крајем, као на слици. Растојање *d* између електрода кондензатора знатно је мање од њиховог средњег радијуса. Занемарујући капиларне ефекте, израчунати висину *h* до које ће се подићи ниво воде у простору између електрода, ако је позната релативна диелектрична пермеабилност воде ε.



Решење. Почетни капацитет кондензатора, пре подизања нивоа воде, биће:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{2\pi Rl}{d}, \quad \textbf{(1p.)}$$

где је *R* средњи радијус плоча, а *l* њихова висина. Након подизања нивоа воде до висине *x*:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{2\pi Rh}{d} + \varepsilon_0 \frac{2\pi R(l-h)}{d} = \frac{\varepsilon_0 2\pi R}{d}(\varepsilon h + l - h),$$

$$C = \frac{2\pi R \varepsilon_0}{d}\left[l + (\varepsilon - 1)h\right]. \quad \textbf{(1п.)}$$

Укупна енергија кондензатора и воде једнака је збиру њихове електростатичке и гравитационе потенцијалне енергије:

$$W = \frac{1}{2}\frac{2\pi R\varepsilon_0}{d}\left[l + (\varepsilon-1)h\right]U^2 + \rho(2\pi Rhd)g\frac{h}{2}. \ (\rho \text{ је густина воде}). \quad \textbf{(2п.)}$$

Пораст енергије система кондензатор-течност δW при порасту висине течности за малу вредност δh,

$$\delta W = \delta h\left[\frac{1}{2}\frac{2\pi R\varepsilon_0}{d}(\varepsilon - 1)U^2 + \rho(2\pi Rhd)g\right] \quad \textbf{(2п.)}$$

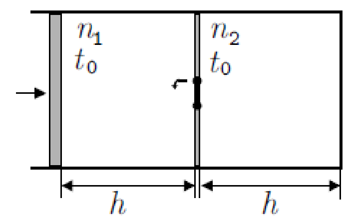
уравнотежава се радом електричних сила $A = \delta q U$, где је δq укупна количина протеклог наелектрисања, односно:

$$A = \delta h \frac{(2\pi R)\varepsilon_0}{d}(\varepsilon - 1)U^2. \quad \textbf{(2п.)}$$

Одавде:

$$\rho g h d = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{2d} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{2\rho g d^2}. \quad \textbf{(1п.)} \quad \textbf{Бонус: 1п.}$$

4. Хоризонтално постављен, топлотно изолован суд је фиксираном преградом направљеном од материјала који је добар топлотни изолатор подељен на два једнака дела дужина x=1m (слика). Суд је затворен фиксираним клипом попречног пресека S=5 dm^2, који је као и преграда направљен од материјала који је добар топлотни изолатор. У левом делу суда се налази n_1=1 mol водоника, а у десном n_2=2 mol истог гаса. Температуре гаса су једнаке у оба дела и износе t_0=0$°C$. На прегради се налази вентил који се отвара када се притисци у левом и десном делу суда изједначе. Клип се полако помера ка прегради. Када се притисци изједначе (отвори се вентил) накратко се прекида померање клипа, да би се затим наставило све док клип не дође до преграде. Одредити за колико се променила унутрашња енергија гаса у суду. Водоник сматрати идеалним двоатомским гасом (Cv=5R/2).



Решење. Сва количина гаса је на почетку на истој температури T_0, док ће на крају процеса такође сва количина гаса имати исту температуру T. Промена унутрашње енергије гаса је дакле:

$\Delta U = (n_1 + n_2)C_V(T - T_0)$(1p).

Pritisci u prvom i drugom delu su respektivno:

$p_1 = \dfrac{n_1 R T_0}{Sh}$ (0.5p)i $p_2 = \dfrac{n_2 R T_0}{Sh}$ (0.5p)

Помоћу једначина за адијабатски процес ($\Delta Q = 0$) $pV^\gamma = const$ и $p^{1-\gamma}T^\gamma = const$ и користећи горње једначине може се израчунати да температура гаса у првом делу, пре отварања вентила:

$$T_1 = T_0\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \text{ (1.5p)}$$

А растојање клипа од преграде

$$\Delta h = h\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \text{(1.5p)}$$

Након отварања вентила, температуре ће се изједначити према формули:

$C_V n_1(T_1 - T_E) = C_V n_2(T_E - T_0)$, одакле је

$$T_E = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_0}{n_1 + n_2} \text{ (1p)}$$

Након изједначавања температура, гас ће се адијабатски сабијати док сав гас не буде само у другом делу. Коришћење $TV^{\gamma-1} = const$, добија се

$$T = T_E\left[1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma-1} \quad \text{(1п)}$$

Коначна ј-на за промену унутрашње енергије је онда:

$$\Delta U = (n_1 + n_2) C_V T_0 \left(\frac{n_1 \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + n_2}{n_1 + n_2} \left[1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^{\gamma - 1} - 1 \right) = 5.073 kJ \text{ (2p)}$$

Задатке припремили: Флореа Улиу (Крајова), Дејан Димитријевић (Ниш) и Владан Павловић (Ниш).