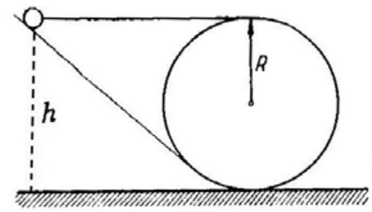
Трећи сусрет и такмичење ученика и студената ``Наука и друштво``

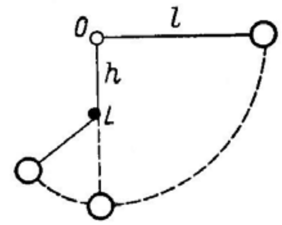
Турну Северин – Румунија, 15-17 април 2011.

Категорија IX

1. A. A hevy ball of mass m slides without friction down an inclined chute which forms a loop of radius R (see the figure). At what height will the ball leave the chute and to what maximum height will it rise afterwards if it begins to run down the chute without initial velocity from a height $h = 2R$? Consider the size of the ball negligible.

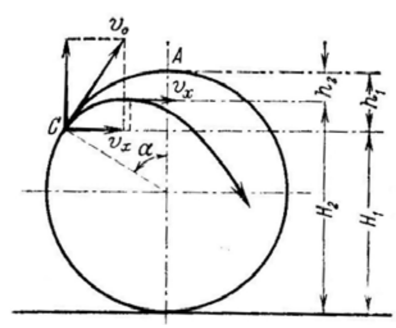


B. A heavy ball of mass m is suspended from a thread of length $\ell = 2h$ which is fixed at point O. A nail L is hamered in at a distance h from the point O, on the same vertical (see the figure). The thread is moved an angle $\alpha = 90^0$ from the position of the equilibrium and released.
a). How will the ball move when the thread meets the nail L ?
b).What maximum height will the ball attain after passing the position of equilibrium ?

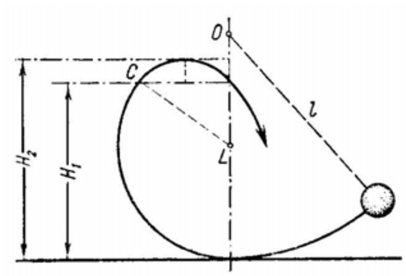


Solutions.

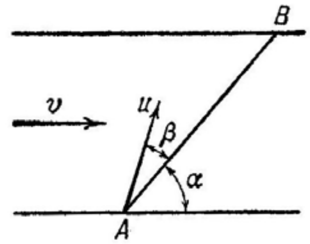
A. The height at which the ball will be detached from the chute is determined on the basis of Newton's second law and is equal to $H_1 = 5R/3$. The ball will move from the point C (see the figure) in a parabola with initial velocity $v_0 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gR/3}$, directed at an angle α which can be determined from the equation $\cos\alpha = 1 - h_1/R = 2/3$. At the maximum elevation of the parabola the velocity of the ball will be equal to the horizontal component of the velocity v_0, i.e. $v_x = v_0 \cos\alpha = (2/3)\sqrt{2gR/3} = \sqrt{8gR/27}$. It follows from the law of conservation of energy that at this moment the ball should be at such a distance h_2 along the vertical from the point A that $v_x^2 = 2gh_2$. Hence $h_2 = v_x^2/2g = 4R/27$ and $H_2 = 2R - h_2 = 50R/27$.



B. Up to the height $H_1 = 5\ell/6$ (see the figure) the ball will move over an arc of a circle of radius $\ell/2$. After this, the ball will move in a parabola up to the height $H_2 = 25\ell/27$.

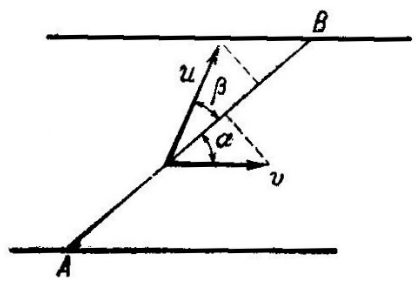


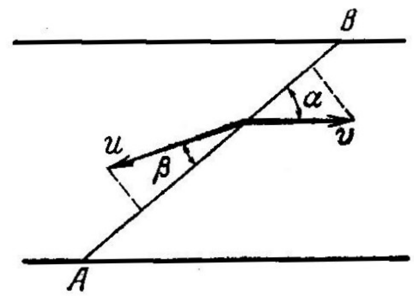
2. A launch plies between two points A and B on the opposite banks of a river (see the figure), always following the line AB. The distance S between A and B is *1200m*. The velocity of the river current $v = 1{,}9 m/s$ is constant over the entire width of the river. The line AB makes an angle $\alpha = 60^0$ with the direction of the current. With what velocity u and at what angle β to the line AB should the launch move to cover the distance AB and back in a time $t = 5\min$? The angle β remains the same during the passage from A to B and from B to A.



Solution

In order that the moving launch is always on the straight line AB , the components of the velocity of the current and of the launch in the direction perpendicular to AB should be equal, i.e $u \sin\beta = v \sin\alpha$. When the launch moves from A to B its velocity relative to the banks will be $u\cos\beta + v\cos\alpha$ and the time of motion will be determined from the equation $t_1 = S/(u\cos\beta + v\cos\alpha)$. The time of motion from B to A can be found from the obvious equation $t_2 = S/(u\cos\beta - v\cos\alpha)$. From the condition $t_1 + t_2 = t\ (= 5\min)$ we find $\beta = arcctg\left[\left(S + \sqrt{S^2 + v^2 t^2 \cos^2\alpha}\right)/(vt\sin\alpha)\right] \approx 12^0$ and $u = v(\sin\alpha)/(\sin\beta) \approx 8m/s.$

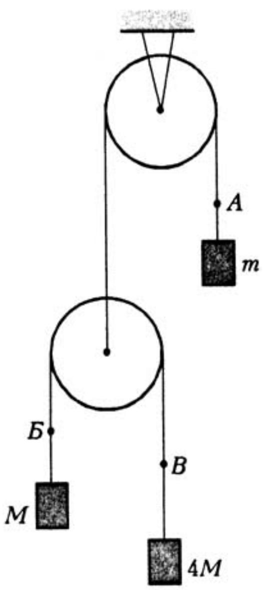




3. Два брода плове по језеру, један другом у сусрет по правој линији, брзинама $v_1 = 25{,}2\text{km/h}$ и $v_2 = 32{,}4\text{km/h}$. Кад су бродови на међусобном растојању $\ell_1 = 900\text{m}$ са првог брода, према другом, полети голуб писмоноша брзином $u = 54\text{km/h}$. Кад стигне на други брод голуб се одмах врати на први, затим одмах крене према другом и тако даље. Одредити пут који голуб пређе до тренутка кад растојање међу бродовима постане $\ell_2 = 180\text{m}$. Одредити пут који је голуб прешао од првог брода према другом (укупан пут у једном смеру) и посебно пут који је прешао од другог према првом (укупан пут у другом смеру) за време од кад је растојање међу бродовима било $\ell_1 = 900\text{m}$, па до сусрета бродова (водити рачуна да се голуб више пута креће од првог ка другом и обрнуто). Занемарити време које голуб проводи на бродовима и сматрати да се креће хоризонтално. [*Напомена*: можете користити релацију $1 + x + x^2 + ... = 1/(1-x)$, за $x < 1$, мада та релација није неопходна за решење задатка.]

Решење 3. Лако је закључити да је $\ell_1 - \ell_2 = v_1 t + v_2 t$ **(1п.)**, а одавде је је $t = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{v_1 + v_2}$ **(1п.)**, а за то време голуб је прешао пут $\ell = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{v_1 + v_2} u$ **(1п.)** односно $\ell = 675\text{m}$ **(1п.)**. Нека је L_1 пут који је голуб прешао од првог ка другом а L_2 пут који је голуб прешао од другог ка првом. Разлика ових путева једнака је путу који први брод пређе до сусрета јер је у почетку голуб полетео са првог. Дакле $L_1 - L_2 = \dfrac{v_1 \ell_1}{v_1 + v_2}$ (1) **(1п.)**. Збир ових путева једнак је укупном пређеном путу голуба, односно једнак је ℓ уз услов да је $\ell_2 = 0$. Дакле, $L_1 + L_2 = \dfrac{u \ell_1}{v_1 + v_2}$ (2) **(1п.)**. Из (1) и (2) налазимо $L_1 = \dfrac{\ell_1}{2} \dfrac{(u + v_1)}{v_1 + v_2}$ **(1п.)** и $L_1 = \dfrac{\ell_1}{2} \dfrac{(u - v_1)}{v_1 + v_2}$ **(1п.)**. Замена бројних вредности даје $L_1 = 618,75\text{m}$ **(0,5п.)** и $L_2 = 225\text{m}$ **(0,51п.)**.

4. Тегови чије су масе M и $4M$ помоћу лаке неистегљиве нити пребачени су преко лаког котура који је помоћу друге нити пребачене преко непокретног лаког котура повезан са телом масе m као на слици . Ако се систем препути сам себи, одредити однос маса m/M
а) да би тело масе m мировало,
б) да би тело масе M мировало.



Решење 4. а) Да би тег масе m мировао треба да је испуњен услов $T_Б = T_В = 0,5T_A = 0,5mg$ **(1п.)**. Покретни котур у том случају је непокретан, следи $(T_Б - Mg)/M = (4Mg - T_В)/(4M)$ **(1п.)** или $(0,5m - M)/M = (4M - 0,5m)/(4M)$ **(1п.)**. Одатле налазимо $m/M = 16/5$ **(1п.)**.
б) Да би тег M био непокретан треба да су испуњени услови $T_Б = T_В = Mg$ **(1п.)**, $T_A = 2Mg$ **(1п.)**. При томе покретни котур се креће наниже убрзањем $(T_A - mg)/m$ **(1п.)**, а

убрзање тега $4M$ треба да буде двоструко веће: $(4Mg - Mg)/(4M) = 2(2Mg - mg)/m$ **(1п.)**, одатле добијамо $m/M = 16/11$ **(1п.)**.

Задатак може да се ради генералније. Напишимо једначине кретања за свако тело $T_A - mg = ma$ **(0,5п.)**, $4Mg - T_B - F_{iB} = 4Ma'$ **(0,5п.)**, $T_Б - F_{iБ} - Mg = Ma'$ **(0,5п.)** где је a убрзање спуштања покретног котура у односу на непокретни систем, a' убрзање кретања тела M и $4M$ у систему (неинерцијалном) везаном за покретни (доњи) котур, $T_Б = T_B \equiv T$ **(0,5п.)**, $T_A = 2T$ **(0,5п.)**, $F_{iB} = 4Ma$ **(0,5п.)**, $F_{iБ} = Ma$ **(0,5п.)**. Горње једначине кретања постају $2T - mg = ma$ **(0,5п.)**, $4M(g-a) - T = 4Ma'$ **(0,5п.)**, $T + M(a-g) = Ma'$ **(0,5п.)** и њиховим решавањем добијамо $a = (16M - 5m)g/(16M + 5m)$ **(0,5п.)**, $a' = 6mg/(16M + 5m)$ **(0,5п.)**. Убрзање тела M у односу нанепокретни систем је $a_M = a - a' = (16M - 11m)g/(16M + 5m)$ **(0,5п.)**. Захтев задатка да тело m мирује биће задовољен ако је $a = 0$ **(0,5п.)**, тј. $16M - 5m = 0$ **(0,5п.)** односно $m/M = 16/5$ **(0,5п.)**, а да би тело M остало непокретно треба да је $a_M = 0$ тј.
$16M - 11m = 0$ **(0,5п.)**, следи $m/M = 16/11$ **(0,5п.)**.

Задатке припремили: Флореа Улиу (Крајова) и Иван Манчев (Ниш).