O trouglu

mr Radmila Krstić, asistent

Prirodno-matematički fakultet, Niš

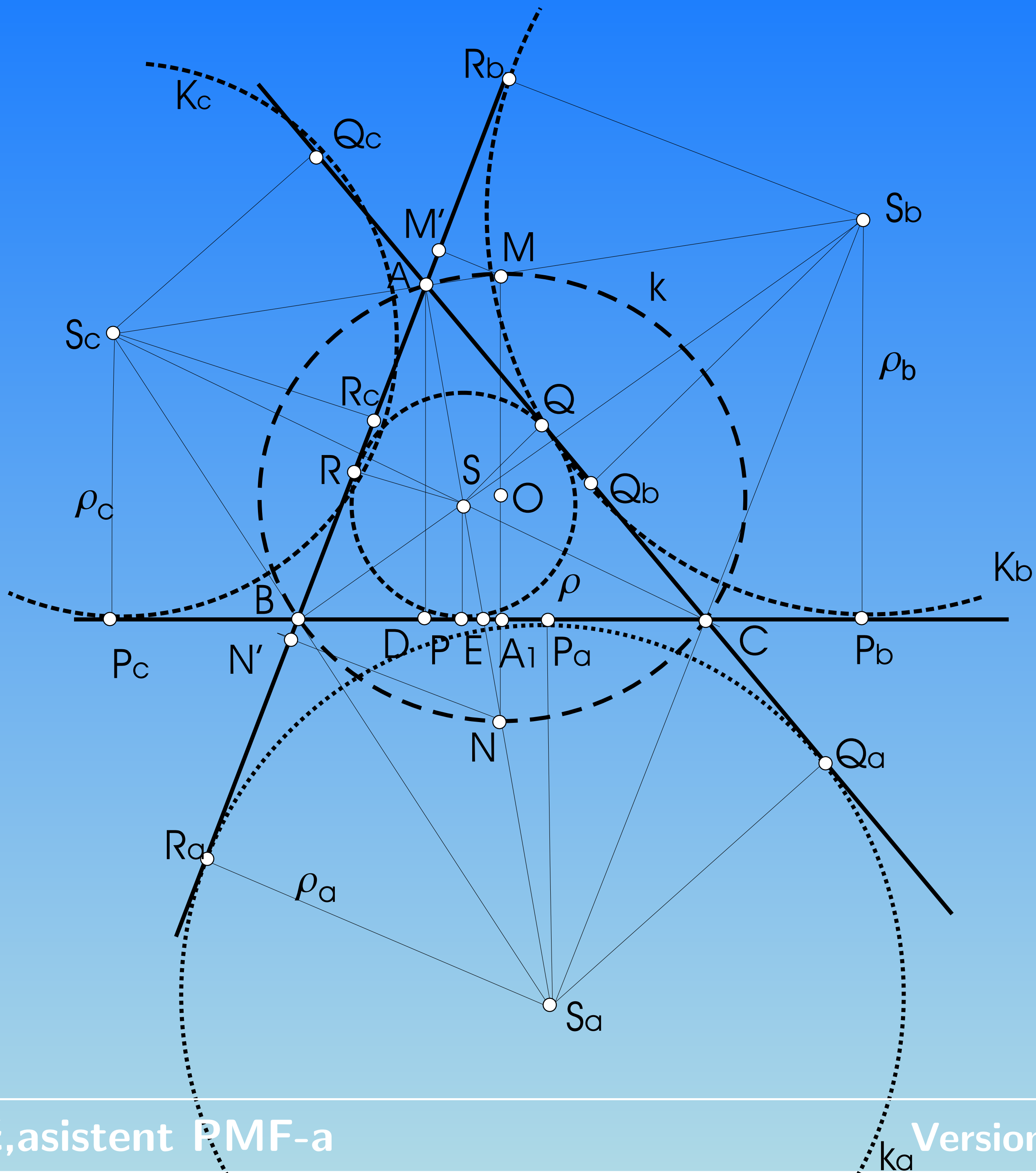
O TROUGLU

Trougao je nezaobilazna tema kako osnovne tako i srednje škole. O trouglu se skoro sve zna. Navodimo te činjenice. Svaku od njih nastavnik može iskoristiti u radu sa učenicima zavisno od uzrasta istih.

1 Osnovna teorema

Na početku uvedimo oznake: Neka su: $A_1\,B_1$, C_1 **središta stranica** $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ **trougla** ABC; p **njegov poluobim;** O **centar a** r **poluprečnik kruga** l **opisanog oko trougla** ABC; S, S_a, S_b, S_c

centri i ρ, ρ_a, ρ_b, ρ_c poluprečnici upisanih krugova k, k_a, k_b, k_c trougla ABC pri čemu krug k dodiruje stranice BC, CA, AB u tačkama P, Q, R; krug k_a dodiruje stranicu BC i produžetke stranica CA i AB u tačkama P_a, Q_a, R_a; krug k_b dodiruje stranicu CA i produžetke stranica AB i BC u tačkama Q_b, R_b, P_b; krug k_c dodiruje stranicu AB i produžetke stranica BC i CA u tačkama R_c, P_c, Q_c; M i N su tačke u kojima simetrala stranice BC seče krug l pri čemu je M na luku BAC i M' i N' normalne projekcije tačaka M i N na pravoj AB. Tačka E je presek simetrale unutrašnjeg ugla kod temena A i stranice BC (Slika 1.).


Rb
Kc
Qc
M′
M
Sb
A
k
Sc
ρb
Rc
Q
R
S
O
Qb
ρc
Kb
B
ρ
Pc
N′
D
P
E
A1
Pa
C
Pb
N
Qa
Ra
ρa
Sa
ka

Teorema **1.1 Za svaki trougao ABC (pri gore navedenim oznakama) važi:**

1 . $AQ_a + AR_a = p$

2 . $QQ_a = RR_a = BC$

3 . $Q_bQ_c = R_bR_c = BC$

4 . $AQ = AR = p - a,\ BR_c = BP_c = p - a,\ CP_b = CQ_b = p - a$

5 . $PP_a = b - c,\ P_bP_c = b + c$

6 . $P_aA_1 = A_1P,\ P_bA_1 = A_1P_c$

7 . $A_1M = (\rho_b + \rho_c)/2,\ A_1N = (\rho_a - \rho)/2$

8 . $MN' = (\rho_b - \rho_c)/2,\ NN' = (\rho + \rho_a)/2$

9 . $AM' = (b - c)/2,\ AN' = (b + c)/2$

10 . $\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$

Dokaz: **Primetimo da je tačka N na simetrali AE unutrašnjeg ugla A trougla ABC jer je $\angle BAN = \angle CAN$ kao periferijski uglovi nad jednakim lucima BN i CN kruga l.**

1. **Kako je raspored tačaka $A - B - R_a$ i $A - C - Q_a$ biće $AR_a + AQ_a = AB + BR_a + AC + CQ_a$, odakle s obzirom na jednakost tangentnih duži $AR_a = AQ_a$, $BR_a = BP_a$, $CQ_a = CP_a$ i rasporeda tačaka $B - P_a - C$ dobijamo $BP_a + CP_a = BC$. Uzimajući sve navedeno u obzir dobijamo $2AQ_a = AB + BC + CA$, tj. $AQ_a = AR_a = p$. Analogno važi $BP_b - BR_b = p$ i $CP_c = CQ_c = p$.**

2. **Zbog rasporeda tačaka $R - B - R_a$ i $Q - C - Q_a$ je $RR_a + QQ_a = RB + BR_a + QC + CQ_a$ i sobzirom na jednakost duži $QQ_a = RR_a$, $BR = BP$, $BR_a = BP_a$, $CQ = CP$, $CQ_a = CP_a$, a iz rasporeda tačaka $B - P - C$ i $B - P_a - C$ sledi $BP + PC = BC$ i $BP_a +$**

$P_aC = BC$, pa je $QQ_a = RR_a = BC$. Na isti način se dokazuje $PP_b = RR_b = AC$ i $PP_c = QQ_c = AB$.

3. Kako je $B - C - P_b$ i $C - Q_b - Q_c$ to je $BC = BP_b - CP_b$ i $Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b$, odakle, sobzirom da je $BP_b = CQ_c$ i $CP_b = CQ_b$ sledi$Q_bQ_c = BC$. Na isti način je $R_bR_c = BC$ i analogno važi $P_aP_c = R_aR_c = AC$, $P_aP_b = Q_aQ_b = AB$.

4. Zbog rasporeda tačaka $A - Q - Q_a$ imamo $AQ = AQ_a - QQ_a$ i $AQ_a = p$ (dokazano u 1.), $QQ_a = BC = a$ (dokazano u 2.) i jednakosti tangentnih duži $AQ = AR$ dobijamo

$$AQ = AR = p - a$$

Slično se dokazuju preostale jednakosti

$$BR_c = BP_c = p - a, \;\; CB_p = CQ_b = p - a$$

Analogno važe i sledeće jednakosti

$$CQ = CP = p - c, \; BR_a = BP_a = p - c, \; AR_b = AQ_b = p - c$$

$$BP = BR = p - b, \; CP_a = CQ_a = p - b, \; AR_c = AQ_c = p - b$$

5. **Ako su tačke** P **i** P_a **iste onda je** $SS_a \perp BC$**, tj.** $AS \perp BC$ **pa je** $AB = AC$**. Ako su tačke** P **i** P_a **različite biće raspored tačaka** $B - P - P_a - C$ **ili** $B - P_a - P - C$**. Ako je** $B - P - P_a - C$**, tada je** $PP_a = CP - CP_a$**, tj.** $PP_a = BP_a - BP$**. Koristeći 4. dobijamo**

$$PP_a = BP_a - BP = BR_a - BR = (p - c) - (p - b) = b - c$$

Za dokaz druge jednakosti, iz $P_c - B - P_b$ sledi

$$P_cP_b = BP_c + BP_b = (p-a) + p = 2p - a = b + c$$

6. Tačke P i P_a su između tačaka B i C. Kako je, prema 4., $BP = p - b$ i $CP_a = p - b$ to je $BP = CP_a$. Tačka A_1 je sredina stranice BC. Ako je raspored tačaka $B - P - P_a - C$, tada je

$$PA_1 = BA_1 - BP = CA_1 - CP_a = A_1P_a,$$

odnosno $PA_1 = A_1P_a$. Tačke P_c i P_b su takve da je $P_c - B - C - P_b$ i kako je $BP_c = p - a$, $CP_b = p - a$ to je $BP_c = CP_b$. Iz svega ovog sledi $P_cA_1 = P_cB + BA_1 = P_bC + CA_1 = A_1P_b$, odnosno $P_cA_1 = A_1P_b$.

7. Duž A_1M je srednja linija konveksnog trapeza $P_bP_cS_cS_b$. Zaista, prema 6. tačka A_1 je sredina kraka P_bP_c, a duž A_1M normalna je na pravoj BC, dakle paralelna osnovicama S_bP_b i S_cP_c tog trapeza. Kako je duž MN prečnik kruga l i $A \in l$ pa je $\angle MAN$ prav, tj. prava AM je normalna na simetralu AN ugla A trougla ABC. Ovo znači da je tačka M na simetrali S_bS_c spoljašnjeg ugla A trougla ABC. Dakle, tačka M pripada kraku S_bS_c trapeza, pa je AM njegova srednja linija, tj. sredina duži S_bS_c. Iz ovoga sledi

$$AM = \frac{1}{2}(P_bS_b + P_cS_c) = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c).$$

Ako posmatramo složeni trapez PP_aS_aS, slično prethodnom, biće A_1N srednja linija ovog trapeza. Koristeći osobine srednje linije složenog trapeza dobijamo

$$A_1N = \frac{1}{2}(S_aP_a - SP) = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho).$$

8. U složenom trapezu $R_bR_cS_cS_b$ tačka M je sredina kraka S_bS_c (prema 7.) i $MM' \perp R_bR_c$, tj. MM' paralelna sa S_bS_c i S_cR_c, što znači da je MM' srednja linija ovog trapeza. Iz ovoga sledi

$$MM' = \frac{1}{2}(S_bR_b - S_cR_c) = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c.$$

Odavde još dobijamo da je M' sredina duži R_bR_c.

Iz konveksnog trapeza RR_aS_aS kako je N sredina kraka SS_a, a NN' normalno na RR_a tj. NN' paralelno sa SR i S_aR_a biće NN' srednja linija ovog trapeza. Znači

$$NN' = \frac{1}{2}(S_aR_a + SR) = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho).$$

Kao posledicu imamo i to da je N' sredina duži RR_a.

9. Iz napred dokazanih činjenica imamo da je M' sredina duži R_bR_c, $R_bR_c = a$ i $AR_b = p - c$, a sobzirom na raspored tačaka $A - M' - R_b$ biće $AM' = AR_b - M'R_b = (p - c) - a/2 = (b - c)/2$ ili $AM' = (c - b)/2$.

Takođe , tačka N' je sredina duži RR_a, zatim $RR_a = a$, $AR_a = p$ i zbog rasporeda tačaka $A - N' - R_a$ biće

$$AN' = AR_a - N'R_a = p - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(b + c).$$

10. Kako je raspored tačaka $M - A_1 - N$ to je $MN = A_1M + A_1N$, odakle, sobzirom na jednakosti $A_1M = (\rho_b + \rho_c)/2$, $A_1N = (\rho_a - \rho)/2$ i $MN = 2r$ dobijamo

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r.$$

//

2 Primeri i zadaci

Navedimo nekoliko zadataka i primera.

Zadatak 2.1 Neka su E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena A trougla ABC seku pravu određenu tačkama B i C. Dokazati da je

a) $BE : CE = AB : AC$

b) $BF : CF = -AB : AC$

c) $BE : CE = -BF : CF$.

Koristeći definiciju harmonijske četvorke tačaka, zaključujemo da su tačke E i F harmonijski spregnute sa tačkama B i C, što zapisujemo $\mathcal{H}(B, C; E, F)$.

Definicija 2.1 Kažemo da su tačke C i D harmonijski spregnute sa tačkama A i B ako su A, B, C, D kolinearne tačke takve da je jedna od tačaka C ili D između tačaka A i B, a druga nije, i pri tom je $AC : CB = AD : DB$. To zapisujemo $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Zadatak 2.2 Neka su E i F tačke trougla ABC definisane u zadatku 1., a tačke S, S_a, S_b, S_c definisane na početku. Dokazati da važi

a) $\mathcal{H}(B, C; E, F)$

b) $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$

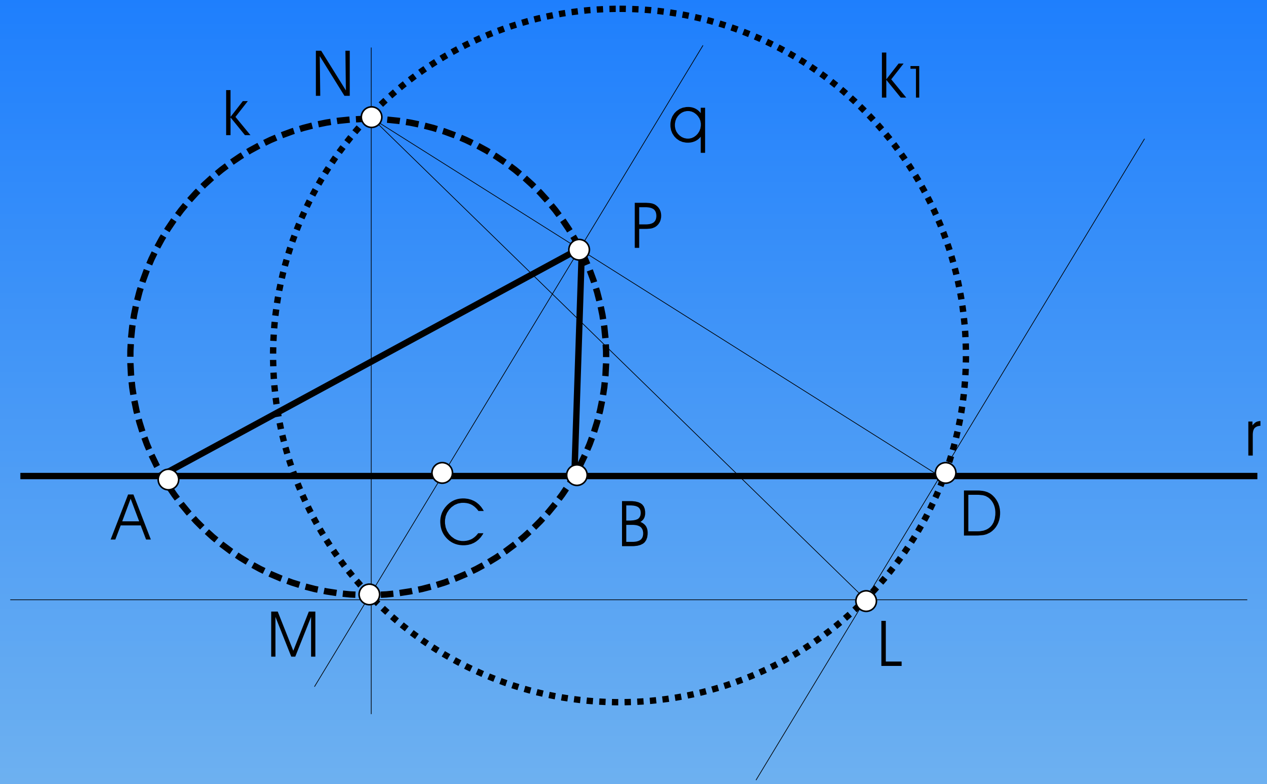
c) $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$.

Zadatak 2.3 Neka su A, B i C tri kolinearne. Konstruisati tačku D tako da je $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Primer 2.1 Konstruisati trougao ABC ako je dato $AD = h_a$, poluprečnik upisanog kruga ρ i $BC = a$.

Zadatak 2.4 Date su dve razne tačke A i B i duž l. Odrediti tačke C i D tako da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ i $CD = l$.

Rešenje: Konstruišimo bilo koji krug k koji sadrži tačke A i B, a zatim konstruišimo simetralu duži AB i označimo sa M i N presečne tačke te simetrale sa krugom k. Obeležimo pravu AB sa r. Neka je p prava koja sadrži tačku M i paralelna je pravoj r. Prava p je, po konstrukciji, tangenta kruga k. Na pravoj p odredimo tačku L takvu da je $ML = l$. Tačke M, N i L su tri nekolinearne tačke pa određuju tačno jedan krug k_1. Kako su tačke M i N sa raznih strana prave r to prava r sa krugom k_1 ima dve zajedničke tačke i neka je D jedna od njih. Konstruišimo kroz tačku M pravu q paralelnu sa pravom određenom tačkama L i D. Kako prava LD seče pravu r u tački D to će i prava q seći pravu r. Neka je taj presek tačka C. Tačke C i D su tražene tačke (videti sliku 2). Dokažimo to.



Slika 2.

Kako tačke M, N i L pripadaju krugu k_1 i pri tom je $\angle NML = R$ (prav ugao) zaključujemo da je NL prečnik kruga k_1. Kako tačka D pripada krugu k_1 čiji je

prečnik NL to je $\angle NDL = R$, tj. $ND \perp LD$. Po konstrukciji je $q \parallel LD$ pa je $q \perp ND$. Neka je $P = ND \times q$. Dakle, važi $\angle MPD = R$, tj. $\angle MPN = R$. Kako je MN prečnik kruga k to je P tačka kruga k.

Posmatrajmo trougao APB. Na krugu k luk AM jednak je luku MB pa je $\angle APC = \angle BPC$ pa je PC simetrala ugla $\angle APB$ tj. ugla $\angle P$ trougla ABP. Kako je $PD \perp PC$ to je PD simetrala spoljašnjeg $\angle P$ trougla APB.

Polupravе PA, PB, PC i PD su harmonijska četvorka polupravih tj. važi $\mathcal{H}(PA, PB; PC, PD)$ pa njihovi preseci sa pravom r jesu harmonijski sprgnute tačke, tj. važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Uočimo sada četvorougao $MCDL$. Ovaj četvorougao je po konstrukciji paralelogram jer je $ML \parallel CD$ i $MC \parallel LD$ pa je $CD = ML = l$, tj. $CD = l$. //

Primer 2.2 Konstruisati trougao ABC ako je poznato $\angle A = \alpha$, $BC = a$ i simetrala ugla kod temena A, $AE = l_a$.

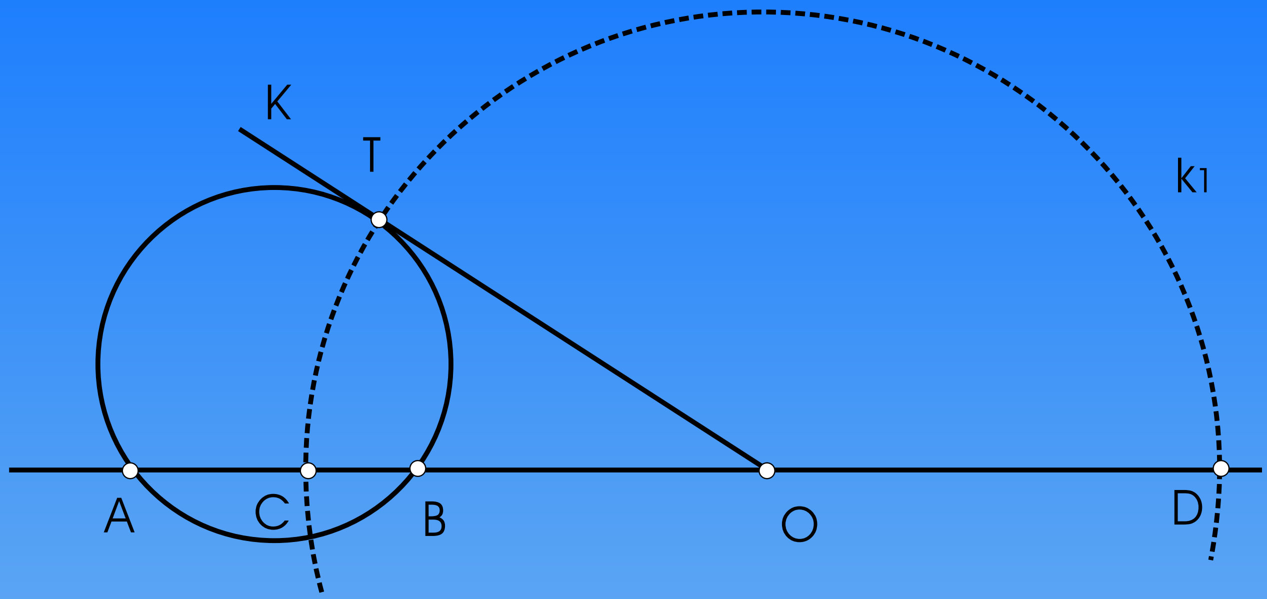
Zadatak 2.5 Konstruisati skup svih tačaka kojima su rastojanja od dve date tačke A i B srazmerne dvema datim dužima m i n.

Napomena: Traženi skup tačaka je Apolonijev krug. Taj krug se dobija na sledeći način: Na pravoj AB konstruišu se tačke C i D tako da je $AC : BC = m : n$ i $AD : BD = m : n$. Traženi krug je krug čiji je prečni duž CD.

Primer 2.3 Konstruisati trougao ABC ako se zna $\angle B - \angle C = \delta$, simetrala ugla kod temena A je $AE = l_a$ i $(b + c) : a = m : n$ (m i n date duži).

Zadatak 2.6 Date su tri kolinearne tačke A, B i O tako da je $A - B - O$. Konstruisati tačke C i D na pravoj AB tako da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ i da je tačka O sredina duži CD.

Rešenje: Konstruišimo proizvoljan krug k koji sadrži tačke A i B. Tačka O je van kruga k, pa možemo konstruisati tangentu OT, $T \in k$, na krug k. Neka je k_1 krug čiji je centar tačka O i poluprečnik duž OT. Krug k_1 seče pravu AB u tačkama C i D, pri čemu je C između A i B, a tačka D na produžetku duži AB. Znači, ako je raspored $A - B - O$, biće $A - C - B - D$. Po konstrukciji je $OC = OD$ jer je CD prečnik kruga k_1, a O center tog kruga (slika 3.).



Slika 3.

Za tačku O **i krug** k **važi** $OT^2 = OA \cdot OB$**. Kako je** $OT = OC$ **(jer** $T, C \in k_1$**) to je** $OC^2 = OA \cdot OB$**, tj.** $OB : OC = OC : OA$**. Iz ovog sledi**

$$(OB + OC) : (OC - OB) = (OC + OA) : (OA - OC)$$

Koristeći jednakost $OC = OD$ imamo $BD : BC = AD : AC$ pa je $AC : BC = AD : BD$, tj. važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Primer 2.4 Konstruisati trougao ABC ako je dato $\angle A = \alpha$, simetrala ugla kod temena A, $AE = l_a$ i $b + c = d$.

Na kraju navodimo nekoliko zadataka iz konstrukcije trougla, uz prethodno dogovorene oznake.

Zadatak 2.7 Konstruisati trougao ABC ako je dato:

(1) $h_a,\ \rho_b,\ b + c = d$

(2) $\angle A = \alpha,\ \rho,\ b + c = d$

(3) $BC = a,\ b + c = d,\ AE = l_a$ (l_a je simetrala $\angle A$)

(4) $h_a,\ BC = a,\ \rho_b$

(5) $\angle B - \angle C = \omega,\ h_a,\ b + c = d \quad (AC > AB)$

(6) $\angle B - \angle C = \omega,\ AE = l_a,\ \rho_a$

(7) $h_a,\ BC = a,\ AE = l_a$

(8) $\angle A = \alpha,\ b + c = d,\ AE = l_a$

(9) $\angle A = \alpha,\ BC = a,\ \rho_a$