O REALNIM BROJEVIMA

Brojevi su jedna od osnova na kojoj je izgrađena matematika, pa i njeno učenje počinje sa brojevima. U osnovi brojeva je pojam prirodnog broja (skup $\mathbb{N}$) (koga je kažu stvorio Bog, a ostale brojeve je izgradio čovek).

Polazimo od toga da su nam poznati skupovi: skup prirodnih brojeva ($\mathbb{N}$), skup celih brojeva ($\mathbb{Z}$) i skup racionalnih brojeva ($\mathbb{Q}$).

1 Uvodni deo

U ovom delu ukratko ćemo reći nešto o relacijama, funkcijama i operacijama.

Definicija 1.1 Neka su A, B neprazni skupovi i $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ njihov Dekartov proizvod. *Relacija* ρ skupova A i B je svaki neprazan podskup $\rho \subset A \times B$. Ako $(a,b) \in \rho$ tada kažemo da je *a u relaciji ρ sa b* i kraće pišemo $a\rho b$. Skupovi $D(\rho) = \{a \in A : \exists b \in B, (a,b) \in \rho\}$, $R(\rho) = \{b \in B : \exists a \in A, (a,b) \in \rho\}$ nazivaju se *skup definisanosti*, odnosno *skup vrednosti* relacije ρ.

Može se definisati proizvod (slaganje, kompozicija) relacija.

Definicija 1.2 Ako su date relacije $f \subset A \times B$ i $g \subset B \times C$, tako da je $R(f) \subset D(g)$ tada je slaganje ove dve relacije definisano relacijom $h \subset A \times C$ sa $(a,c) \in h$ ako postoji $b \in B$ tako da $(a,b) \in f$ i $(b,c) \in g$. Relacija h obično se označava sa $h = g \circ f$.

Pomoću pojma relacije može se definisati funkcija.

Definicija 1.3 Relacija $f \subset A \times B$ za koju važi:
a) $D(f) = A$; b) Iz $(a,b) \in f$, $(a,c) \in f$ sledi $b = c$
naziva se *funkcija f sa skupa A u skup B*. Ovo se često zapisuje $f : A \to B$ ili $b = f(a)$ ako je $(a,b) \in f$. Element $a \in A$ nazivamo "originalom", element $b = f(a) \in B$ "slikom" elementa a, a f je način "pridruživanja". Slaganje funkcija, ako je moguće, definiše se kao slaganje odgovarajućih relacija.

Definicija 1.4 Neka je A neprazan skup i $n \in \mathbb{N}$ prirodan broj. Funkcija $f : A^n \to A$ naziva se operacija dužine n definisana na skupu A. Ako je $n = 1$ ili $n = 2$ i tada se f zove *unarna*, odnosno *binarna* operacija. Za $n = 2$ znak operacije obično se stavlja između elemenata i ako za $a, b, c \in A$ važi $afb = bfa$ ($af(bfc) = (afb)fc$), onda kažemo da je operacija f *komutativna* (*asocijativna*).

Funkcija f je zadana ako znamo skupove $D(f)$ i $R(f)$ i relaciju f, tj. funkcija se može posmatrati i kao uređena trojka (A, f, B), pa su dve funkcije (A_k, f_k, B_k), $k = 1, 2$, jednake ako je $A_1 = A_2, f_1 = f_2, B_1 = B_2$. Ako je $f : A \to B$ funkcija i ako iz $a_1 \neq a_2$ sledi $f(a_1) \neq f(a_2)$ (odnosno, iz $f(a_1) = f(a_2)$ sledi $a_1 = a_2$) tada kažemo da je f *1-1 funkcija* ili *injektivna funkcija*. Ako za svako $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $b = f(a)$ kažemo da je f *surjektivna funkcija* ili funkcija *na*. Za funkciju koja je injektivna i surjektivna kažemo da je *bijekcija* ili *1-1 i na*.

Relacija $\rho \subset A \times A$ može imati slede¸e osobine:
1) Za $\forall a \in A$ je $(a,a) \in \rho$ (*refleksivnost relacije*).
2) Ako $(a,b) \in \rho$ tada $(b,a) \in \rho$ (*simetričnost relacije*).
3) Ako $(a,b) \in \rho$ i $(b,a) \in \rho$ tada je $a = b$ (*antisimetričnost relacije*).
4) Ako $(a,b) \in \rho$ i $(b,c) \in \rho$ tada $(a,c) \in \rho$ (*tranzitivnost relacije*).

Definicija 1.5 Ako za relaciju ρ važe uslovi 1), 2), 4) tada se ρ naziva *relacija ekvivalencije*; a ako važe uslovi 1), 3), 4) onda se ona naziva *relacija poredka (uređenja)*. Uobičajeno je da se relacije ekvivalencije i poredka označavaju sa $\sim$, odnosno $\leq$.

Ako je na skupu A definisana relacija ekvivalencije $\sim$ tada se za svako $a \in A$ može definisati njegova *klasa ekvivalencije* sa $C_a := \{b \in A : b \sim a\}$. Za skup $A/\sim = \{C_a : a \in A\}$ kažemo da *količnički skup (faktor skup)* skupa A po relaciji $\sim$.

Teorema 1.1 Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu X, tada važi:
1) Za $\forall x, y \in X$ je $C_x = C_y$ ili je $C_x \cap C_y = \emptyset$.
2) Za $\forall x \in X$,$\exists y \in X$ tako da $x \in C_y$, tojest $X = \cup_{x \in X} C_x$.
3) Za svaku particiju $\chi = \{X_i : i \in I\}$ skupa X ($X = \cup_{i \in I} X_i$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, za $i \neq j$), postoji relacija ekvivalencije ρ takva da je $X/\sim = \chi$.

Dokaz: 1. Ako je $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, onda se preko elementa $z \in C_x \cap C_y$ i tranzitivnosti relacije $\sim$ dobija da su svi elementi obe klase međusobno ekvivalentni, odnosno da je $C_x = C_y$.
2. Svaki element $x \in X$ pripada svojoj klasi.
3. Pomoću particija χ možemo definisati relaciju ρ sa $x \rho y$ ako isamo ako $x, y \in X_i$, za neko $i \in I$. Sada treba proveriti da je ρ klasa ekvivalencije i da je $X/\rho = \chi$.(prepuštamo čitaocu). //

Relacija ekvivalencije je, na neki način, uopštenje jednakosti, jer elemente iste klase (ekvivalentne elemente) smatramo "jednakim".

Jedan lep primer relacije ekvivalencije je sledeća relacija među skupovima

$A \sim B$ ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$ između skupova A i B. Klase ekvivalencije čine svi "istobrojni" (ekvivalentni) skupovi. Za skup koji je ekvivalentan svom pravom podskupu kažemo da je *beskonačan skup*.

A sada nešto o relaciji poredka $\leq$. Ako na skupu $S \neq \emptyset$ postoji relacija poredka $\leq$ kažemo da je skup S delimično uređen i ožnačavamo $(S, \leq)$. Ako su svaka dva elementa $a, b \in S$ "uporediva", tj. važi $a \leq b$ ili $b \leq a$, tada kažemo da je skup S *potpuno uređen* (*lanac, linearno uređen skup*). Ovakve skupove ćemo kraće zvati uređeni skupovi. Primer potpunog uređenja je relacija $\leq$ u skupu brojeva, a delimično uređenje je relacija $|$ deljivosti u skupu $\mathbb{N}$. Ako je $A \subset S$, tada se na skupu A posmatra relacija poredka koja je restrikcija relacije $\leq$ sa S.

Dalje, neka je S uređen skup sa relacijom poredka $\leq$ i neka je $\emptyset \neq A \subset S$. Za element $M \in A$ ($m \in A$) kažemo da je *najveći* (*najmanji*) ako je $a \leq M$ za svako $a \in A$ ($a \geq m$ za $\forall a \in A$). Ove elemente, ako postoje, označavamo sa $M = \max A$, $m = \min A$.

Definicija 1.6 Broj $M \in S$ ($m \in S$) je *majoranta* (*minoranta*) nepraznog skupa $A \subset S$ ako je $a \leq M$ za $\forall a \in A$ ($a \geq m$ za $\forall a \in A$). Ako postoje, najmanja majoranta (najveća minoranta) skupa A naziva se *supremum* (*infimum*) skupa A i označava sa $\sup A$ ($\inf A$). Označimo sa $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ($m(A)$ skup majoranata (minoranata) skupa A. Ako je $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \emptyset$ ($m(A) = \emptyset$) tada kažemo da je skup A *neograničen odozgo* (*neograničen odozdo*) i pišemo $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$).

Ako postoji, supremum skupa A u S, $\sup A$, može se definisati uslovima:
1) Za svako $a \in A$ je $a \leq \sup A$ ($\sup A$ je majoranta)
2) Za svako $b \in S$, $b < \sup A$, postoji $a \in A$ tako da je $b < a$ (majoranta skupa A manja od $\sup A$ ne postoji).
Slično se može okarakterisati $\inf A$.

Elementi $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$, ako postoje, jedinstveni su. Ako postoji i ako supremum (infimum) skupa pripada skupu onda je to najveći (najmanji) element skupa.

Ako skup A nije beskonačan, tj. ako ima "konačno mnogo elemenata" onda se njegovi elementi mogu poređati ili u rastućem ili u opadajućem nizu. Dokaz ove činjenice može se izvesti matematičkom indukcijom. Na taj način konačan skup A ima najmanji i najveći element.

Ako se radi o beskonačnim skupovima onda je gornja priča malo složenija. Naprimer, skup racionalnih brojeva čiji je kvadrat manji od 2 nema u skupu racionalnih brojeva supremum; dok skup racionalnih brojeva koji su manji od 1 ima supremum ali nema najveći element.

Definicija 1.7 Neka su S i S' dva uređena skupa. Funkcija $f : S \to S'$ je *rastuća* (*opadajuća)* ako važi

$(s_1, s_2 \in S)\,(s_1 < s_2 \text{ u } S) \Longrightarrow f(s_1) \leq f(s_2) \text{ u } S' \quad (f(s_1) \geq f(s_2) \text{ u } S')$

Ako u gornjem uslovu umesto $\leq$ $(\geq)$ stoji $<$ $(>)$ tada kažemo da je f *strogo rastuća* (*strogo opadajuća*) funkcija. Kažemo da je f monotona funkcija ako je ona ili rastuća ili opadajuća funkcija.

Kada je $S = \mathbb{N}$ onda govorimo o *rastućem (opadajućem) nizu* $a(n) = a_n$, $a : \mathbb{N} \to S'$. Ako je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija i $a : \mathbb{N} \to S$ niz elemenata skupa S, tada je $b = a \circ p : \mathbb{N} \to S$ $(b(n) = a(p(n))$ *podniz niza* a pridružen nizu p.

Teorema 1.2 Ako su S i S' uređeni skupovi i $f : S \to S'$ strogo rastuća (strogo opadajuća) surjektivna funkcija, tada postoji inverzna funkcija $f^{-1} : S' \to S$ koja je strogo rastuća (strogo opadajuća).

Dokaz: Ako su $s_1 \neq_2$ elementi skupa S i, na primer $s_1 < s_2$, tada je $f(s_1) < f(s_2)$ (ili $f(s_1) > f(s_2)$), tj. iz $s_1 \neq s_2$ sledi $f(s_1) \neq f(s_2)$. Kako je f i preslikavanje na, to postoji inverzna funkcija f^{-1}. Ako je f strogo rastuća unkcija i $s'_1 < s'_2$ elementi skupa S', tada postoje različiti elementi s_1, s_2 skupa S tako da je $f(s_k) = s'_k$, $k = 1, 2$. Ako je $s_1 > s_2$ tada je $s'_1 = f(s_1) > f(s_2) = s'_2$, što je kontradikcija. Znači da je $f^{-1}(s'_1) < f^{-1}(s'_2)$, tj. f^{-1} je strogo rastuća funkcija. Slično se dokazuje za strogo opadajuću funkciu. //

Ako imamo niz $(a_n), n \in \mathbb{N}$, elemenata nekog uređenog skupa S tada je pitanje da li ga možemo monotono urediti (u smislu relacije poredka u S). U opštem slučaju odgovor je negativan. Sledeća teorema povezuje bilo koji niz sa monotonim nizom.

Teorema 1.3 Svaki niz elemenata uređenog skupa ima monoton podniz.

Dokaz: Neka je $(S, \leq)$ uređen skup i $a : \mathbb{N} \to S$ niz. Definišimo skupove

$$A(n) = \{a(k) : k > n\},\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$N(n) = \{k \in \mathbb{N} : k > n, a(k) > a(n)\},\ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Prvi slučaj: Ako $A(1)$ nema najveći element tada za svako $n \in \mathbb{N}$ je $N(n) \neq \emptyset$, jer je u suprotnom $a(k) \leq a(n)$ za svako $k > n$ pa je $\max A(1) = \max\{a(1), a(2), \ldots, a(n)\}$, što je kontradikcija. Kako je sada $N(n) \subset \mathbb{N}$ neprazan podskup to postoji $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definisana sa $g(n) = \min N(n)$. Na osnovu aksioma prirodnih brojeva postoji funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $f(1) = g(1)$, i $f(n+1) = g(f(n))$, $n \in \mathbb{N}$ $(f(n+1) = g^n(n))$. Ako je

$$f(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} : k > f(n), a(k) > a(f(n))\} = k_0 \tag{3}$$

to je $f(n+1) = k_0 > f(n)$ i $a(f(n+1)) = a(k_0) > a(f(n))$. Ovim smo dokazali da je $b = a \circ f$ podniz niza a koji strogo raste.

Ako $A(k)$, za neko $k > 1$, nema najveći element tada se na niz $b(n) = a(n + k - 1)$, $n \in \mathbb{N}$, primeni prethodni dokaz, tj. postoji strogo rastući niz $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da niz $b \circ p$ strogo raste. Niz $f(n) = p(n) + k - 1$ strogo raste pa je $b \circ p = a \circ f$ strogo rastući podniz niza a.

Drugi slučaj: Za svako $k \in \mathbb{N}$ skup $A(k)$ ima najveći element, tj. sa

$$b(k) = \max A(k),\ k \in \mathbb{N} \tag{4}$$

definisan je niz $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Iz $A(k+1) \subset A(k)$ sledi da je niz b opadajući, a iz (4) imamo da je skup

$$B(n) = \{k \in \mathbb{N} : k > n, a(k) = b(n)\},\ n \in \mathbb{N}$$

neprazan podskup skupa $\mathbb{N}$. Sada se na niz $h(n) = \min B(n)$, $n \in \mathbb{N}$, koji nema najveći element primeni rezultat iz prvog dela i dolazi do opadajućeg podniza niza a. //

Može se pokazati da za konačan broj nizova $f_1, f_2, \dots, f_n$ iz uređenog skupa S postoji strogo rastući niz $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da su svi podnizovi $f_1 \circ p, f_2 \circ p, \dots, f_n \circ p$ monotoni. Za slučaj beskonačnog broja nizova ovo ne važi. Sledeći primer to ilustruje

Primer 1.1 Karakteristična funkcija $\chi_A : X \to \{0,1\}$ skupa $\emptyset \neq A \subset X$ definisa je sa $\chi(x) = 1$, ako $x \in A$, a $\chi(x) = 0$, ako $x \notin A$. Definišimo niz nizova

$$f_n = \chi\{n\},\ \text{ tojest } f_n(n) = 1 \text{ i } f_n(k) = 0 \ \ za\ k \neq n$$

Neka je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastući niz. Kako je $p(n) \geq n$ i $p(1) < p(2)$, to je $(f_{p(2)} \circ p)(1) = 0$, $(f_{p(2)} \circ p)(2) = 1$ i $(f_{p(2)} \circ p)(k) = 0$, $k > 2$. Dobili smo da niz $f_{p(2)}$ nije monoton u $\mathbb{N}$.

2 Aksiome skupa realnih brojeva

Znanja o brojevima, istorijski gledano, sežu u daleku prošlost. Pojam prirodnog broja (brojanja) je neodvojiv od čoveka. Pozitivni celi brojevi (prirodni) i razlomci i računanje sa njima bili su poznati odavno. Problem je bio kada se uočilo da su neke duži nesamerljive, tj. da se odnos njihovih "dužina" ne može izraziti razlomkom. Tada se prešlo na rešenje jednostavnih jednačina i tako dolazi do pojma novih brojeva.

Polazimo od predpostavke da znamo skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva i relacije koje važe u njemu, tj. skup $\mathbb{Q}$ ima sledeće osobine

1)	$(\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q})\ (x + (y + z) = (x + y) + z)$	(asocijativnost)
2)	$(\exists\ 0 \in \mathbb{Q})\ (\forall\ x \in \mathbb{Q})\ (x + 0 = x)$	(neutralni element)
3)	$(\forall\ x \in \mathbb{Q})\ (\exists\ -x \in \mathbb{Q})\ (x + (-x) = 0)$	(suprotni element)
4)	$(\forall x, y \in \mathbb{Q})\ (x + y = y + x)$	(komutativnost)

Osobine 1) do 4) znače da je $(\mathbb{Q}, +)$ komutativna grupa

5)	$(\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q})\ (x(yz) = (xy)z)$	(asocijativnost)
6)	$(\forall\ x, y \in \mathbb{Q})\ (xy = yx)$	(komutativnost)
7)	$(\exists\ 1 \in \mathbb{Q},\ 1 \neq 0)\ (\forall\ x \in \mathbb{Q})\ (x \cdot 1 = x)$	(neutralni (jedinični) element)
8)	$(\forall\ x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0)\ (\exists\ x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q})\ (x \cdot x^{-1} = 1)$	(suprotni (inverzni) element)
9)	$(\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q})\ (x(y + z) = xy + xz)$	(distributivnost $\cdot$ prema $+$)

Svaki skup P u kome su definisane operacije sabiranja $+$ i množenja $\cdot$ i važe osobine od 1) do 9) naziva se *polje*. Dakle, skup $\mathbb{Q}$ je polje.

Na skupu $\mathbb{Q}$ postoji relacija poretka $\leq$ za koju važe uslovi

(I) $(x, y, z \in \mathbb{Q})$ ($x \leq y$ i $y \leq z$ sledi $x \leq z$).

(II) $(x, y \in \mathbb{Q})$ ($x \leq y$ i $y \leq x$ ako i samo ako je $x = y$).

(III) Za svako $x, y \in \mathbb{Q}$ je $x = y$ ili $x < y$ ili $y < x$.

Polje $\mathbb{Q}$ je uređen skup. Uređenje u skupu $\mathbb{Q}$ je saglasno sa operacijama $+$ i $\cdot$, tj. važi

(IV) Za $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leq y$ sledi $x + z \leq y + z$ za svako $z \in \mathbb{Q}$.
(V) Za $x, y \in \mathbb{Q}$, $x, y \geq 0$ sledi $xy \geq 0$.

Svako polje $(P, +, \cdot, \leq)$ koje je uređen skup i u kome važe osobine (IV) i (V) naziva se *uređeno polje* ($\mathbb{Q}$ je uređeno polje).

Uređeno polje P nazivamo *Arhimedovo polje* ako važi
(VI) Za svako $x, y \in P$, $x > 0$, $y \geq 0$, postoji prirodan broj n tako da je $y \leq nx$ (nx se induktivno uvodi, tj. $nx = x + x + \cdots + x$ (n sabiraka).

Potreba da svaki ograničen podskup skupa $\mathbb{Q}$ ima supremum (što u $\mathbb{Q}$ nije tačno) prirodno sledi definicija

Definicija 2.1 Skup $\mathbb{R}$ zovemo *skup realnih brojeva*, njegove elemente *realnim brojevima* ako $\mathbb{R}$ ima sledeće osobine:
(i) $\mathbb{R}$ je uređeno polje.
(ii) Svaki monotono rastući niz elemenata iz $\mathbb{R}$ koji je odozgo ograničen ima u $\mathbb{R}$ supremum.

(Pod supremumom niza a podrazumevamo supremum skupa $\{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Na osnovu aksioma skupa $\mathbb{R}$ može se dokazati

Teorema 2.1 Neka su $x, y, x_k, y_k; k = 1, 2, \ldots, n$ realni brojevi. Tada važi:

1. iz $x_k \leq y_k$, $k = 1, \ldots n$, sledi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq y_1 + y_2 + \cdots y_n$
2. $x \leq y$ ako i samo ako je $x + z \leq y + z$, za neko $z \in \mathbb{R}$
3. iz $2x = x$ sledi $x = 0$
4. $0 \cdot x = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$
5. $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ za svako x, y
6. $z \geq 0$ i $x \leq y$ daje $zx \leq zy$
7. iz $x \leq 0$ i $y \geq 0$ sledi $xy \leq 0$
8. ako je $x, y \leq 0$ tada je $xy \geq 0$
9. za $x \neq 0$ je $x^2 > 0$
10. $x > 0$ daje $x^{-1} > 0$
11. $x \leq y$ ako i samo ako je $xz \leq yz$ za neko $z > 0$
12. iz $0 < x < y$ sledi $x^{-1} > y^{-1}$

Dokaz: Dokažimo neke od ovih osobina.

2. Iz $x \leq y$ i aksioma (IV) imamo $x + z \leq y + z$ za svako z. Obratno, ako je $x + z \leq y + z$ za neko z, tada ova nejednakost važi obema stranama doda isti broj $-z$, pa sledi $x \leq y$.

3. Neka je $2x = x$. Tada je $0 = x + (-x) = (x + x) + (-x) = x + (x + (-x)) = x + 0 = x$.

4. Kako je $0 \cdot x = (0 + 0)x = (0 \cdot x) + (0 \cdot x) = 2(0 \cdot x)$ to iz 3. sledi $0 \cdot x = 0$.

5. Iz $0 = x \cdot 0 = x(y + (-y)) = xy + x(-y)$ sledi da je $x(-y)$ suprotan element elementa xy, tj. $x(-y) = -(xy)$.

6. $x \leq y$ i aksioma (IV) daju $0 = x + (-x) \leq y + (-x)$, što zajedno sa $z \geq 0$ daje (aksioma (V)) $0 \leq z(y + (-x)) = zy + z(-x)$, tj. $zy \geq -(z(-x)) = -(-(zx)) = zx$.

9. Iz $x \neq 0$ i 8. sledi $x^2 \geq 0$. Ako je $x^2 = 0$ tada je $0 = x^{-1} \cdot 0 = x^{-1}(x \cdot x) = (x^{-1} \cdot x)x = 1 \cdot x = x$, što je suprotno $x \neq 0$. //

U ovako uvedenom skupu realnih brojeva treba "prepoznati" skupove $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$. Kako je $1 := e \neq 0$ na osnovu tačke 9 prethodne teoreme je $0 < e^2 = e$, pa je i $2e := e + e > 0$, $3e := e + e + e >$

$0, \cdots, n\cdot e > 0$. Funkcija $j(n) := n\cdot e$ preslikava skup $\mathbb{N}$ na skup $\mathbb{N}' = \{n\cdot e : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Primenom indukcije može se pokazati da je j izomorfizam u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$ i da je strogo monotono rastuća funkcija, tj. $(\mathbb{N}', e, (n\cdot e)' := (n+1)e)$ je skup prirodnih brojeva. Zbog toga indentifikujemo $n\cdot e$ i prirodan broj n. Skup celih brojeva je, ustvari, skup $\mathbb{Z} = \{0, n\cdot e, n\cdot(-e) : n \in \mathbb{N}\}$. Racionalni brojevi su elementi skupa $\{m\cdot n^{-1} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 2.2 Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je Arhimedovo polje, tj. za realne brojeve $a > 0$ i $b \geq 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $na \geq b$.

Dokaz: Kako je $a > 0$ to je i $2a = a + a > a$, $3a = (2a) + a > 2a$, (indukcijom se dobija da je niz $n \to na$ monotono rastući. Ako bi za svako $n \in \mathbb{N}$ bilo $na \leq b$ tada, na osnovu aksiome (ii), postoji $S = \sup A = \sup\{na : n \in \mathbb{N}\}$. Zbog $S - a < S$ postoji $n \in \mathbb{N}$ da je $S - a < na$, odnosno $S < (n+1)a \in A$ što je suprotno tome da je S majoranta skupa A. Znači, postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $na > a$. //

Teorema 2.3 Između svaka dva realna broja postoji racionalan broj. Skup racionalnih brojeva je prebrojiv, tj. može se poređati u niz.

Dokaz: Ako su realni brojevi a, b različitog znaka onda se između njih nalazi racionalan broj 0. Neka je $0 \leq a < b$. Kako je $(b-a)^{-1} > 0$ to, na osnovu prethodne teoreme, postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n > (b-a)^{-1}$ i postoji $k \in \mathbb{N}$, $b \leq k/n$. Skup $K = \{k \in \mathbb{N} : b \leq k/n\} \subset \mathbb{N}$ je neprazan skup pa postoji $h = \min K$. Neposredno se proverava da je $a < (h-1)/n < b$.

Skup razlomaka (racionalnih brojeva) m/n, $m, n \in \mathbb{N}$ možemo poređati u niz po rastućim zbirovima $m + n$ (na primer za $m + n = 3$ imamo mogućnosti $m = 0, n = 3$; $m = 1, n = 2$; $m = 2, n = 1$). Naravno da u ovom nizu ima i jednakih brojeva. Slično se mogu i negativni razlomci poređati u niz. Sada uzimajući, naizmenično, članove jednog i drugog niza dolazimo do niza u kome se nalaze svi racionalni brojevi. //

3 Neprebrojivost skupa realnih brojeva

Teorema 3.1 Neka je $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, opadajući niz zatvorenih intervala skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, tj. $I_n \supset I_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Prvo dokažimo sledeće dve leme:

Lema 3.1 Ako su A i B dva neprazna ograničena podskupa od $\mathbb{R}$ tada

$$\text{iz } A \subset B \text{ sledi } \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Dokaz: Dokaz neposredno sledi iz definicije gornjih brojeva. //

Lema 3.2 Ako je $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ rastući i odozgo ograničen niz realnih brojeva i $B_n = \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ tada je $\sup B_n = \sup A$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Iz predhodne leme je $\sup B_n \leq \sup A$. Kako je $\sup B_n \geq a_k$ za svako $k \geq n$ i niz (a_n) monotono raste, to je $\sup B_n \geq a_k$ za svako $k \in \mathbb{N}$ pa je $\sup B_n \geq \sup A$. Znači $supB_n = \sup A$. //

Dokaz teoreme 3.1. Kako je (a_n) monotono rastući niz čija je majoranta b_1, a niz (b_n) monotono opadajući niz čija je minoranta a_1, to postoji $a = \sup(a_n)$ i $b = \inf(b_n)$ (ako je niz a opadajući i ograničen odozdo tada je niz $-a$ rastući i ograničen odozgo, pa po aksiomi (VI) postoji $-\sup(-a) = \inf a$). Prema lemi 3.1, za svako $n \in \mathbb{N}$ je $a = \sup\{a_k : k \geq n\} \leq b_n$, tj. $a \leq b_n$ za svako n pa je $a \leq \inf(b_n) = b$. Kako je $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ za svako n to $a \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Ustvari je $[a, b] = \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. //

Teorema 3.2 (G. Cantor, 1874) Skup $I_0 = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je neprebrojiv, tj. ne može se poređati u niz.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $I_0 = \{x_1, x_2, \ldots\}$. prebrojiv skup. Definišimo interval $I_1 = [a_1, b_1]$ na sledeći način:

ako je $x_1 < \frac{a+b}{2}$ tada je $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$;
ako je $x_1 > \frac{a+b}{2}$ tada je $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$;
ako je $x_2 = \frac{a+b}{2}$ tada je $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{4}$.

Za ovako definisan interval I_1 važi $x_1 \notin I_1$.

Sada za interval I_1 i broj x_2 definišemo interval I_2 tako de je $I_2 \subset I_1$ i $x_2 \notin I_2$ (ako $x_2 \notin I_1$ uzimamo $I_2 = I_1$, u suprotnom definišemo I_2 na isti način kako je definisan interval I_1, ali polazeći od I_1 i tačke x_2). Neka smo, na ovaj način, definisali intervale $I_0 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$ tako da $x_k \notin I_k$ za svako k, $1 \leq k \leq n$.

Interval I_{n+1} definišemo na sledeći način. Ako $x_{n+1} \notin I_n$ uzimamo $I_{n+1} := I_n$, ako to nije onda definišemo I_{n+1} pomoću I_n i tačke x_{n+1} na isti način kako je definisan interval I_1.

Ovo nam omogućava da definišemo opadajući niz interval I_n, $n \in \mathbb{N}$, takav da $x_n \notin I_n$ za svako n. Na osnovu teoreme 3.1 $\emptyset \neq \cap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset I_0$, tj. postoji realan broj $x \in I_0$ koji nije element polaznog niza I_0. Kontradikcija. //

Posledica 3.1 Postoji bar jedan rastući, odozgo ograničen, niz racionalnih brojeva koji nema supremum u skupu $\mathbb{Q}$.

Dokaz: Suprotno tvrđenje dovodi do toga da skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva zadovoljava aksiome skupa realnih brojeva, pa bi onda bio neprebrojiv, što je kontradikcija. //

Posledica 3.2 Skup svih iracionalnih brojeva je neprebrojiv

Sledeća teorema je ekvivalent aksiome (VI).

Teorema 3.3 Ako je $A \subset \mathbb{R}$ odozgo ograničen neprazan skup tada on ima supremum u $\mathbb{R}$.

Za dokaz koristimo sledeće leme:

Lema 3.3 Za svako $n \in \mathbb{N}$ je $2^n > n$.

Dokaz: Dokaz se neposredno izvodi indukcijom. //

Lema 3.4 Ako je $0 \leq a < b$ i $a \leq \frac{1}{2^n} \cdot b$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $a = 0$.

Dokaz: Iz pretpostavka $a > 0$ i teoreme 2.2 sledi da postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $na > b$, a na osnovu leme 3.3 je $b < na < 2^n a \leq b$,što je nemoguće. //

Lema 3.5 Neka je $I_n = [a_n, b_n] \subset I_0 = [a, b]$, $a < b$, $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, opadajući niz zatvorenih intervala tako da važi $b_n - a_n \leq (b - a)/2^n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je $I = \cap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ jednočlan skup.

Dokaz: Prema teremi 2.3 skup I je neprazan. Pretpostavimo da I sadrži brojeve x, y i da je $x < y$, tada je $[x, y] \subset I \subset [a_n, b_n]$ za svako n. Sada je $x - y \leq b_n - a_n \leq (b - a)/2^n$ za svako n pa, prema lemi 3.4, sledi $x = y$. //

Posledica 3.3 Za svaki realn broj x postoji monotono opadajući niz zatvorenih intervala sa racionalnim krajevima $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, tako da je $\cap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$.

Dokaz: Na osnovu teoreme 2.3 između brojeva $x - \frac{1}{2^n}$ i $x - \frac{1}{2^{n+1}}$ postoji racionalan broj a_n, a između brojeva $x + \frac{1}{2^{n+1}}$ i $x + \frac{1}{2^n}$ postoji racionalan broj b_n. Kako je $y - x \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ za svako n to, na osnovu leme 3.4, sledi $x = y$. //

Napomenimo da je u lemi 3.5 bitna pretpostavka da su intervali zatvoreni, jer, na primer, za niz $I_n = (0, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, skup $\cap I_n$ je prazan skup.

Dokaz teoreme 3.3. Neka je M skup majoranata skupa A. On nije prazan i neka je $a \in A$ i $b \in M$ i $I_0 := [a, b]$. Definišimo interval $I_1 = [a_1, b_1]$ na sledeći način: Ako $\frac{a+b}{2} \in M$ onda je $a_1 = a$ i $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Ako $\frac{a+b}{2} \notin B$ onda postoji element iz A, označimo ga sa a_1, takav da je $\frac{a+b}{2} < a_1$; uzimamo $b_1 = b$. Prema konstrukciji intervala I_1 je $b_1 - a_1 \leq \frac{b-a}{2}$, $I_0 \supset I_1$, $a_1 \in A$, $b_1 \in M$. Dalje se postupak ponovi na interval $I_1 = [a_1, b_1]$ i dolazimo do intervala $I_2 = [a_2, b_2]$, $I_1 \supset I_2$, $b_2 - a_2 \leq \frac{b-a}{2^2}$, $a_2 \in A$, $b_2 \in M$. Ponavljajući gornji postupak definisali smo niz intervala I_n tako da važi:

$I_n \supset I_{n+1}$, $a_n \in A$, $b_n \in M$, $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$, $\qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

Prema lemi 3.5 postoji samo jedan realan broj s tako da je $\{s\} = \cap I_n$. Dokažimo da je $s = \sup A$. Pretpostavimo da $s \notin M$, tada postoji $a \in A$ tako da je $s < a$, tj. $a - s > 0$ i kako je $\mathbb{R}$ Arhimedovo polje to $b - a \leq n(a - s) < 2^n(a - s)$. Dalje je $b_n - s \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n} < a - s$, tj. $b_n < a$ što je suprotno da $b_n \in M$. To znači da $s \in M$.

Broj s je majoranta. Dokažimo da skup A nema manje majorante. Zaista, ako je $c < s$ onda $c \notin I_n$ za neko $n \in \mathbb{N}$, tj. $c < a_n$ i kako $a_n \in A$ sledi da c nije majoranta. //

4 Izomorfizam grupa $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^+$

Skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ jesu grupe, prvi u odnosu na sabiranje, a drugi u odnosu na množenje. Dokažimo sledeći uređajni izomorfizam ove dve strukture.

Teorema 4.1 Za svaki realan broj $a > 1$ postoji samo jedna funkcija sa $\mathbb{R}^+$ na $\mathbb{R}$ za koju važi:

(1) $\quad f(xy) = f(x) + f(y)$ za svako $x, y \in \mathbb{R}^+$

(2) $\quad (x < y) \Longrightarrow (f(x) < f(y)$

(3) $\quad f(a) = 1$

Ako ova funkcija postoji tada važi: $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, tj. $f(1) = 0$.

Kako je f preslikavanje "na", to postoji $a \in \mathbb{R}$ tako da je $f(a) = 1$ i tada je $f(a^n) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Zbog monotonosti funkcije f sledi $f(a) = 1 < 2 = f(a^2)$ sledi $a < a^2$, tj. $a > 1$. Lako se vidi da je $f(x^m) = mf(x)$ za svako $m \in \mathbb{Z}$.

Za dokaz ove teoreme koristimo sledeće leme.

Lema 4.1 Ako je $a > 1$, onda je skup $A = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ odozgo neograničen.

Iz $a^n(a - 1) > 0$ sledi da je niz $f(n) = a^n$ strogo monotono rastući. Ako je A ograničen skup to postoji $b = \sup A$, tj. $a^n \leq b$ za svako $n \in \mathbb{N}$, a kako je i $a^n \leq b/a < b$ za svako n to je $b = b/a$, odnosno $b = 0$ (kontradikcija).

Lema 4.2 Ako je $x > 0$ i $a > 1$ tada:

I. Postoji samo jedan ceo broj m takav da je $a^m \leq x < a^{m+1}$;

II. Skup $A_x = \{\frac{m}{n} : a^m \leq x^n, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$ je odozgo ograničen.

Dokaz: I. Iz leme 4.1, za $x \geq 1$, skup $A = \{a^n : a^n > x, n \in \mathbb{N}\}$ je neprazan podskup od $\mathbb{N}$, pa postoji $p = \min A$, tj. $a^{p-1} \leq x < a^p$. Za $x \in (0,1)$ ovo se primeni na $1/x$.

II. Kako je $x^n > 0$ to, prema I., postoji samo jedno $z \in \mathbb{Z}$ za koje važi $a^m \leq x^n < a^{m+1}$, pa je $A_x \neq \emptyset$, $m/n \in A_x$ i $(m+1)/n \notin A_x$. Neka je $(p/q) \leq (m/n)$ i $m/n \in A_x$. Tada, zbog monotonosti, važi $a^{pn} \leq a^{nq}$, tj. $a^p \leq x^q$ pa sledi da $p/q \in A_x$. Sada se vidi da je broj $(m+1)/n$ majoranta skupa A_x, jer iz $(m+1)/n < p/q \in A_x$ sledilo bi $(m+1)/n \in A_x$ što je kontradikcija. //

Lema 4.3 Ako je $a > 1$ i m prirodan broj, onda postoji $t > 1$ takvo da je $t^m \leq a$.

Dokaz: Za $1 < a$ postoji s, $1 < s < a$. Ako je $t_1 = \min\{s, s/a\}$, tada je $1 < t_1 < a$ i $t_1^2 \leq a$. Na isti način dolazimo do broja t_2 tako da je $1 < t_2 < t_1$ i $t_2^2 \leq t_1$. Ovin načinom dolazimo do niza brojeva $t_1 > t_2 > t_3 > \cdots > 1$ tako da je $t_n^{2^n} \leq a$. Kako $t_n^n < t_n^{2^n}$ to je $t = t_n$ traženi broj. //

Dokaz teoreme 4.1: Ako je $x > 1$ i $n \in \mathbb{N}$ to, na osnovu leme4.2, postoji samo jedan broj $m \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$a^m \leq x^n < a^{m+1} \tag{1}$$

Prtpostavka da f strogo raste dovodi do $f(a^m) < f(x^n) < f(a^{m+1})$, pa sledi

$$\frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m+1}{n} \tag{2}$$

Sada se "nazire" konstrukcija funkcije f. Neka je A_x skup svih brojeva $\frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, za koje važi (1). Skup A_x je odozgo ograniče (lema 4.2), a iz (2) sledi $0 \leq f(x) - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$ pa je $f(x) = \sup A_x$, za svako $x > 0$.

Iz svega ovog, tražena funkcija se definiše sa

$$f(x) = \sup A_x \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

Funkcija je dobro definisana, jer za svako $x > 0$ postoji jedinstven neprazan odozgo ograničen skup A_x i jedistveno određen broj $\sup A_x$. Dokažimo da je f tražena funkcija.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $x, y > 0$. Prema lemi 4.2 postoje celi brojevi p, q tako da je $a^p \leq x^n < a^{p+1}$, $a^q \leq y^n < a^{q+1}$. Iz ovih nejednakosti sledi $a^{p+q} \leq (xy)^n < a^{p+q+2}$. Sada važi

$$\frac{p}{n} \leq f(x) < \frac{p+1}{n}, \quad \frac{q}{n} \leq f(y) < \frac{q+1}{n}, \quad \frac{p+q}{n} \leq f(xy) < \frac{p+q+2}{n}$$

a odavde sledi

$$-\frac{2}{n} \leq f(xy) - f(x) - f(y) < \frac{2}{n}$$

iz čega dobiamo izomorfizam $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Za $z > 1$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $a < z^n$ (lema 4.1). Postoji broj $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $a^m \leq z^n < a^{m+1}$, $m \geq 1$. Kako $m/n \in A_z$ i kako je $m/n \leq f(z)$ to je $f(z) \geq (m/n) \geq (1/n) > 0$. Neka je $0 < x < y$, tada je $z = y/x > 1$, pa je $f(y) = f(xz) = f(x) + f(z) > f(x)$. Dokazali smo da f strogo monotono raste.

Dokaz da je f preslikavanje "na" prepuštamo čitaocu (ima posla).

Na osnovu prethodne teoreme može se dokazati:

Teorema 4.2 Za $b \in (0,1)$ postoji samo jedna funkcija h sa $\mathbb{R}^+$ na $\mathbb{R}$, tako da važi:

1) $h(xy) = h(x) + h(y)$ za svako $x, y > 0$

2) h je strogo monotono opadajuća funkcija

3) $h(b) = 1$

(Iskoristi se teorema 4.1 za $a = 1/b > 1$.

Funkcije f i h zapisujemo sa $\log_a x$, $x > 0$ i nazivamo logaritamskom funkcijom.

Primedba: Na kraju ove priče, koja u sebi sadrži niz lepih dokaza, ostaje pitanje egzistencije skupa $\mathbb{R}$, tj. postojanja skupa koji zadovoljava navedene aksiome. Tu priču ostavljamo za neko sledeće predavanje.

5 Zadaci

Svi naredni zadaci su u vezi skupa realnih brojeva tako da to posebno ne naglašavamo.

1. Neka su A i B neprazni skupovi i c broj. Neka je $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $AB := \{ab : a \in A, b \in B\}$ i $cA := \{ca : a \in A\}$.

Dokazati da važi:

$f(A + B) = f(A) + f(B)$, $f \in \{\inf, \sup\}$;

ako je $A, B \subset \mathbb{R}^+$, tada je $f(AB) = f(A)f(B)$, za $f \in \{\inf, \sup\}$

$\inf(-A) = -\sup(A)$; $\quad \sup(-A) = -\inf(A)$.

Koliko je $\sup(cA)$, $\inf(cA)$ za $c \in \mathbb{R}$?

2. Za niz (a_n), $n \in \mathbb{N}$, definisani su $\limsup$ i $\liminf$ kao najveća, odnosno najmanja, delimična granica.

Dokazati da se ovi brojevi mogu definisati sa

$\limsup a_n = \inf \sup\{a_k : k \geq n\}$; $\qquad \liminf a_n = \sup \inf\{a_k : k \geq n\}$.

3. Dokazati da važi:

a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n) \leq \liminf x_n + \limsup y_n$;

b) $\liminf x_n + \limsup y_n \leq \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$.

4. Ako je $x_n, y_n \geq 0$ za svako n, tada je:

a) $\liminf x_n \cdot \liminf y_n \leq \liminf(x_n y_n) \leq \liminf x_n \cdot \limsup y_n$;

b) $\liminf x_n \cdot \limsup y_n \leq \limsup(x_n y_n) \leq \limsup x_n \cdot \limsup y_n$.

5. Ako postoji $\lim x_n$, tada je:

$\limsup(x_n + y_n) = \lim x_n + \limsup y_n$; $\quad \limsup(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \limsup y_n \quad (x_n \geq 0,\ n \in \mathbb{N})$.

6. Naći primere tako da u zadacima 2 i 3 imamo stroge nejednakosti.

U Nišu, 20.03.2004.god. $\qquad$ dr Ivan Jovanović, prof. PMF-a