NEJEDNAKOSTI I PRIMENE

dr Jelena Manojlović
Prirodno-matematički fakultet, Niš

SADRŽAJ

1. Nejednakosti između brojnih sredina

Prvi pojam o aritmetičkoj sredini dva pozitivna broja potiče verovatno još od Pitagorejaca. Pretpostavlja se da su oni najverovatnije znali i za dobro poznatu nejednakost između aritmetičke i geometriske sredine dva pozitivna broja

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad a, b > 0, \tag{1.1}$$

ali se pouzdano zna da je ovu nejednakost dokazao EUKLID. Ona se pokazuje elementarno, korišćenjem svojstva da za proizvoljna dva pozitivna broja važi

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Naime, kvadriranjem leve strane prethodne nejednakosti dobija se,

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$$

odakle, očigledno sledi (1.1). Nejednakost se često koristi i u sledećem ekvivalentnom obliku

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad a, b > 0. \tag{1.2}$$

Ako levoj i desnoj strani nejednakosti $2\,a\,b \leq a^2 + b^2$ dodamo $a^2 + b^2$, dobijamo takođe često korišćenu nejednakost

$$(a+b)^2 \leq 2\,a^2 + 2\,b^2, \quad a, b > 0. \tag{1.3}$$

Kako se u mnogim matematičkim problemima javljaju nejednakosti sa više od dva različita broja, postavio se problem uopštenja nejednakosti (1.1). U tu svrhu uvodi se pojam aritmetičke i geometriske sredine za n pozitivnih brojeva. Sem toga, uvode se još dva pojma brojnih sredina, odnosno pojmovi kvadratne i harmonijske sredine za n pozitivnih brojeva.

Definicija 1.1. Neka je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je **harmonijska sredina** $H_n(a)$ brojeva $a_1, a_2 \ldots, a_n$ definisana izrazom

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}};$$

njihova **geometrijska sredina** $G_n(a)$ je definisana sa

$$G_n(a) = (a_1\,a_2\,\ldots\,a_n)^{\frac{1}{n}};$$

njihova **aritmetička sredina** $A_n(a)$ je definisana sa

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n};$$

i njihova **kvadratna sredina** $K_n(a)$ je definisana sa

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Teorema 1.1. (Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$A_n(a) \geq G_n(a) \tag{1.4}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Dokazaćemo teoremu matematičkom indukcijom. Za $n = 2$ nejednakost (1.4) postaje (1.1), tj.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1\,a_2}\,.$$

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n = k-1 \geq 2$, tj. da važi

$$A_{k-1}(a) \geq G_{k-1}(a) \tag{1.5}$$

i pokažimo da važi za $n = k$. Možemo pretpostaviti, bez gubitka opštosti, da je $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$. Tada je

$$a_1 = \frac{\overbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}^{k}}{k} \leq A_k(a) \leq \frac{\overbrace{a_k + a_k + \ldots + a_k}^{k}}{k} = a_k\,. \tag{1.6}$$

Primetimo da je iz (1.6) $a_k - A_k(a) \geq 0$, tj. $a_1 + a_k - A_k(a) \geq a_1 > 0$.

Posmatrajmo $k-1$ pozitivnih brojeva $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_1 + a_k - A_k(a)$, za koje možemo primeniti indukcijsku pretpostavku (1.5), odnosno važi

$$\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_1 + a_k - A_k(a)}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\,(a_1 + a_k - A_k(a))}\,.$$

Kako je $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = k\,A_k(a)$, prethodna nejednakost postaje

$$\frac{k\,A_k(a) - A_k(a)}{k-1} = A_k(a) \geq \sqrt[k-1]{a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\,(a_1 + a_k - A_k(a))}\,.$$

Odavde sledi, da je

$$\begin{aligned} &A_k^{k-1}(a) \geq a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\,(a_1 + a_k - A_k(a)), \quad \text{tj.} \\ &A_k^{k}(a) \geq A_k(a)\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\,(a_1 + a_k - A_k(a)). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Pokažimo sada da je

$$A_k(a)\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\,(a_1 + a_k - A_k(a)) \geq a_1\, a_2\, \ldots\, a_{k-1}\, a_k = G_k^k(a)\,. \tag{1.8}$$

Ako prethodnu nejednakost podelimo sa $a_2\, a_3 \ldots\, a_{k-1} > 0$, dobijamo ekvivalentnu nejednakost

$$\begin{aligned} A_k(a)\,(a_1 + a_k - A_k(a)) \geq a_1\, a_k \quad &\Longleftrightarrow \quad A_k(a)\, a_1 - a_1\, a_k + A_k(a)\,(a_k - A_k(a)) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -a_1(a_k - A_k(a)) + A_k(a)\,(a_k - A_k(a)) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (A_k(a) - a_1)\,(a_k - A_k(a)) \geq 0\,. \end{aligned}$$

Na osnovu (1.6) su $A_k(a) - a_1$ i $a_k - A_k(a)$ pozitivni brojevi, pa je i njihov proizvod pozitivan broj. Dakle, pethodna nejednakost je tačna, odnosno važi (1.8). Sada, iz (1.7) i (1.8) sledi da je $A_k^k(a) \geq G_k^k(a)$, tj. $A_k(a) \geq G_k(a)$.

Dokažimo da jednakost u (1.4) važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, očigledno imamo jednakost u (1.4). S druge strane, pretpostavimo da su bar dva broja iz niza brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različita međusobom, na primer $a_1 \neq a_2$. Tada je

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 \ldots + a_n}{n} \geq \left(\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \ldots a_n\right)^{\frac{1}{n}} > (a_1\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_n)^{\frac{1}{n}}\,,$$

jer je

$$\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1\, a_2} \quad \text{za } a_1 \neq a_2.$$

Ovim je dokaz završen. $\square$

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine zvaćemo kratko kao (GA) nejednakost, dok ćemo u primenama koristiti oznake

$$A_n(a) \overset{\text{(A}-\text{G)}}{\geq} G_n(a) \qquad \text{odnosno} \quad G_n(a) \overset{\text{(G}-\text{A)}}{\leq} A_n(a) \tag{1.9}$$

Teorema 1.2. (Nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$G_n(a) \geq H_n(a) \tag{1.10}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Nejednakost (GA) za brojeve $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \ldots, \dfrac{1}{a_n}$ glasi

$$\left(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \overset{\text{(G−A)}}{\leq} \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}. \tag{1.11}$$

Prema Teoremi 1.1. jednakost važi ako i samo ako je $\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{a_2} = \ldots = \dfrac{1}{a_n}$, tj. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Iz (1.11) sledi

$$G_n(a) = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \ldots + \frac{1}{a_n}} = H_n(a),$$

tj. nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine. □

Teorema 1.3. (Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$K_n(a) \geq A_n(a) \tag{1.12}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Ako se u identitetu

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = {} & a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \\ & + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_1a_n + a_2a_3 + \ldots + a_2a_n + \ldots + a_{n-1}a_n),\end{aligned}$$

na desnoj strani jednakosti iskoristi nejednakost (1.2) za $a_i,\ a_k,\ 1 \leq i,\ k \leq n$, tj. da je $2a_ia_k \leq a_i^2 + a_k^2$, dobijamo nejednakost

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2). \tag{1.13}$$

Kako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni, iz (1.13) sledi da je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \sqrt{n}\,\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2},$$

tj.

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} = K_n(A)\,.$$

Ostaje još da se pokaže da jednakost u (1.12) važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, očigledno imamo jednakost u (1.12). S druge strane, ako pretpostavimo da su bar dva broja iz niza brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različita međusobom, na primer $a_1 \neq a_2$, imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} \\ &\leq \sqrt{\frac{2\,\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}} < \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}},\end{aligned}$$

jer je za $a_1 \neq a - 2$

$$\frac{(a_1 + a_2)^2}{2} < a_1^2 + a_2^2\,.$$

Ovim je dokaz završen. □

Nejednakosti (1.10) i (1.12) nazivamo kraće (HG) nejednakost i (AK) nejednakost respektivno, dok ćemo u primenama koristiti analogne oznake kao kod nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, tj. analogne oznakama (1.9).

Teoreme 1.1., 1.2. i 1.3. konačno daju da je

$$\boxed{H_n(a) \le G_n(a) \le A_n(a) \le K_n(a)}$$

Imamo i sledeća dva rezultata:

Teorema 1.4. *Ako je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ proizvoljna n-torka pozitivnih brojeva, tada je*

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \le H_n(a). \tag{1.14}$$

Dokaz. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je

$$0 < a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{n-1} \le a_n\,. \tag{1.15}$$

Tada je $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a_1$. Na osnovu nejednakosti (1.15) je

$$\frac{a_1}{a_2} \le 1,\ \frac{a_1}{a_3} \le 1,\ \ldots\ ,\frac{a_1}{a_n} \le 1,$$

tako da je

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} \le \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n,$$

odakle sledi

$$a_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) \le n \quad \Longrightarrow \quad a_1 \le \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = H_n(a)$$

čime je dokaz završen. $\square$

Teorema 1.5. *Ako je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ proizvoljna n-torka pozitivnih brojeva, tada je*

$$K_n(a) \le \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \tag{1.16}$$

Dokaz. Kao i u dokazu prethodne teoreme, bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da važi (1.15). Tada je $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a_n$, a prema (1.15) imamo da je

$$a_1^2 \le a_n^2,\ a_2^2 \le a_n^2,\ \ldots\ ,a_{n-1}^2 \le a_n^2,\ a_n^2 \le a_n^2,$$

tako da je

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2 \le n\, a_n^2,$$

odakle sledi

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \le a_n. \qquad \square$$

Dakle, konačno imamo da važi

$$\boxed{\min\{a_1, \ldots, a_n\} \le H_n(a) \le G_n(a) \le A_n(a) \le K_n(a) \le \max\{a_1, \ldots, a_n\}}$$

Pokazane nejednakosti imaju veoma važnu ulogu i nalaze veoma široku primenu u svim oblastima matematike.

2. Primena nejednakosti između brojnih sredina

Nejednakosti između sredina mogu se koristiti da bi se pokazale mnoge druge nejednakosti, između ostalih i mnoge geometrijske nejednakosti o kojima ćemo govoriti u Poglavlju 3. Štaviše, nejednakosti između sredina nalaze svoju primenu i u rešavanju jednačina, nejednačina, kao i u rešavanju tkz. problema ekstremnih vrednosti odnosno određivanja minimalnih i maksimalnih vrednosti određenih veličina. U ovom poglavlju biće navedene primene nejednakosti između sredina u pokazivanju drugih nejednakosti, kao i u rešavanju jednačina i nejednačina.

Primer 2.1. *Dokazati da za proizvoljne n-torke realnih brojevaje $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ važi nejednakost:*

$$G_n(a) + G_n(b) \le G_n(a+b), \quad \text{tj.}$$
$$\sqrt[n]{a_1\, a_2\, \ldots\, a_n} + \sqrt[n]{b_1\, b_2\, \ldots\, b_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1)\,(a_2+b_2)\,\ldots\,(a_n+b_n)}$$

Rešenje: Treba zapravo pokazati da je

$$\sqrt[n]{x_1\, x_2\, \ldots\, x_n} + \sqrt[n]{y_1\, y_2\, \ldots\, y_n} \le 1, \tag{2.1}$$

gde su $x_k = \dfrac{a_k}{a_k+b_k}$, $y_k = \dfrac{b_k}{a_k+b_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Iz (GA) nejednakosti je

$$\sqrt[n]{x_1\, x_2\, \ldots\, x_n} \overset{\text{(G−A)}}{\le} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\,; \qquad \sqrt[n]{y_1\, y_2\, \ldots\, y_n} \overset{\text{(G−A)}}{\le} \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\,,$$

tako da sabiranjem ovih nejednakosti, uzevši u obzir da je $x_k + y_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, dobijamo

$$\sqrt[n]{x_1\, x_2\, \ldots\, x_n} + \sqrt[n]{y_1\, y_2\, \ldots\, y_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = 1,$$

tj. važi (2.1). $\triangle$

Primer 2.2. (**[1]Bernulijeva nejednakost**) $(1+\alpha)^n \ge 1 + n\,\alpha$, $\alpha \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje: Kako je $1 + \alpha \ge 0$, to je $1 + n\alpha \ge 0$. Koristeće (GA) nejednakost imamo

$$\Big((1+n\alpha)\cdot \underbrace{1 \ldots 1}_{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}} \overset{\text{(G−A)}}{\le} \frac{1 + n\alpha + 1 + \ldots + 1}{n} = 1 + \alpha\,, \quad n > 1\,.$$

Dakle, $1 + n\,\alpha \le (1+\alpha)^n\,.$ $\triangle$

Primer 2.3. *Dokazati nejednakost* $\sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}$, *$n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.*

Rešenje: Prema (GA) nejednakosti je

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n} < \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}\,, \quad n \ge 2\,. \qquad \triangle$$

Primer 2.4. *Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, takve da je $a + b + c = 1$, važi nejednakost*

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \ge 64\,.$$

[0]J. Bernoulli (1654-1705), švajcarski matematičar

Rešenje: Korišćenjem datog uslova leva strane date nejednakosti može se zapisati u sledećem obliku

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) &= \frac{a+1}{a}\cdot\frac{b+1}{b}\cdot\frac{c+1}{c}\\ &= \frac{a+a+b+c}{a}\cdot\frac{b+a+b+c}{b}\cdot\frac{c+a+b+c}{c},\end{aligned}$$

što dalje primenom (GA) nejednakosti povlači da je

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \overset{\text{(A−G)}}{\geq} \frac{1}{a\,b\,c}\,4\,\sqrt[4]{a^2b\,c}\cdot 4\,\sqrt[4]{a\,b^2c}\cdot 4\,\sqrt[4]{a\,b\,c^2} = \frac{64}{a\,b\,c}\,\sqrt[4]{a^4b^4c^4} = 64\,. \quad \triangle$$

Važi i opštije tvrđenje koje pokazujemo u sledećem primeru.

Primer 2.5. *Pokazati da važi nejednakost*

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\geq 2^n,$$

gde su $a_k>0$, $k=1,2,\ldots,n$ *takvi da je* $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$.

Rešenje: Iz (HG) nejednakosti je

$$\begin{aligned}\left[\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\right]^{1/n} &= \left[\frac{a_1}{a_1+1}\cdot\frac{a_2}{a_2+1}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_n+1}\right]^{1/n}\\ &\overset{\text{(G−H)}}{\geq} \frac{n}{\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+1}}.\end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{a_k}{a_k+1}=\frac{a_k+1-1}{a_k+1}=1-\frac{1}{a_k+1},\qquad k=1,2,\ldots,n$$

prethodna nejednakost postaje

$$\left[\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\right]^{1/n}\geq\frac{n}{n-\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\right)}. \tag{2.2}$$

S druge strane, iz nejednakosti harmonijske i aritmetičke sredine, uz korišćenje uslova $a_1+\ldots+a_n=n$, imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}}{n} &\overset{\text{(A−H)}}{\geq} \frac{n}{a_1+1+a_2+1+\ldots+a_n+1}\\ &= \frac{n}{n+a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Iz poslednje nejednakosti, dakle sledi da je

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\geq\frac{n}{2}\implies n-\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\right)\leq n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2},$$

odnosno

$$n\cdot\frac{1}{n-\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\right)}\geq n\cdot\frac{2}{n}=2. \tag{2.3}$$

Sada iz (2.2) i (2.3) zaključujemo da je

$$\left[\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\right]^{1/n}\geq 2,$$

odakle stepenovanjem dobijamo traženu nejednakost. $\triangle$

Primer 2.6. *Dokazati da za svaka tri prirodna broja a, b, c važi nejednakost*

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{a}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Rešenje: Iz (HG) nejednakosti, imamo da je

$$G(\underbrace{a,\ldots,a}_{a},\underbrace{b,\ldots,b}_{b},\underbrace{c,\ldots,c}_{c}) \geq H(\underbrace{a,\ldots,a}_{a},\underbrace{b,\ldots,b}_{b},\underbrace{c,\ldots,c}_{c}),$$

odnosno

$$\sqrt[a+b+c]{a^a \cdot b^b \cdot c^c} \geq \frac{a+b+c}{\underbrace{\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a}}_{a}+\underbrace{\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b}}_{b}+\underbrace{\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{c}}_{c}} = \frac{a+b+c}{3}. \quad \triangle$$

Primer 2.7. *Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi, dokazati da važe nejednakosti*

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc \qquad \text{i} \qquad \sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}.$$

Rešenje: Prema nejednakosti (1.1) je

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad a+c \geq 2\sqrt{ac}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc},$$

odakle množenjem direktno sledi prva nejednakost. Pored toga, primenom (GA) nejednakosti, imamo da je

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}} \overset{\text{(A−G)}}{\geq} 3\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{a}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{b}}\right)^{1/3} = 3\left(\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{a\,b\,c}\right)^{1/6}.$$

Korišćenjem prve nejednakosti sada se dobija da je

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt[6]{8} = 3\,(2^3)^{\frac{1}{6}} = 3\sqrt{2}. \quad \triangle$$

Primer 2.8. *Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi pokazati da važi nejednakost*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Rešenje: Uvedimo oznake

$$S = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}, \qquad S_1 = \frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b}, \qquad S_2 = \frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}$$

Primetimo najpre da je $S_1 + S_2 = 3$. Pored toga, imamo da je

$$S + S_1 + S_2 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right).$$

Primenom nejednakosti između harmonijske i aritmetičke sredine je

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c} \overset{\text{(A−H)}}{\geq} \frac{9}{b+c+a+b+a+c} = \frac{9}{2(a+b+c)},$$

tj. $S + S_1 + S_2 \geq \frac{9}{2}$. Dakle, $S \geq \frac{9}{2} - (S_1 + S_2) = \frac{3}{2}$, što je i trebalo pokazati. $\triangle$

Primer 2.9. *Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c važi nejednakost*

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc. \tag{2.4}$$

Rešenje: Nakon množenja data nejednakost postaje

$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 \geq 6abc.$$

Dokažimo da je ova nejednakost tačna. Prema (GA) nejednakosti, imamo

$$\frac{a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2}{6} \overset{(\mathrm{A-G})}{\geq} \sqrt[6]{a^2b \cdot ab^2 \cdot a^2c \cdot ac^2 \cdot b^2c \cdot bc^2},$$

odnosno

$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 \geq 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = 6\,a\,b\,c. \quad \triangle$$

Primer 2.10. *Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c važi nejednakost*

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a\,b\,c\,(a+b+c)\,.$$

Rešenje: Na osnovu (AK) nejednakosti je

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}} \overset{(\mathrm{K-A})}{\geq} \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \implies a^4+b^4+c^4 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}. \tag{2.5}$$

Zbog iste (AK) nejednakosti imamo i da je

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \overset{(\mathrm{K-A})}{\geq} \frac{a+b+c}{3} \quad &\implies \quad a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \\ &\implies \quad (a^2+b^2+c^2)^2 \geq \frac{(a+b+c)^4}{9}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sada, iz (2.5) i (2.6) imamo da je

$$a^4+b^4+c^4 \geq \frac{(a+b+c)^4}{27}. \tag{2.7}$$

Prema (GA) nejednakosti je

$$\sqrt[3]{a\,b\,c} \overset{(\mathrm{G-A})}{\leq} \frac{a+b+c}{3} \implies (a+b+c)^3 \geq 27\,a\,b\,c.$$

Množenjem poslednje nejednakosti sa $a+b+c > 0$ dobija se

$$(a+b+c)^4 \geq 27\,a\,b\,c(a+b+c),$$

što zajedno sa (2.7) daje

$$a^4+b^4+c^4 \geq a\,b\,c\,(a+b+c). \quad \triangle$$

Primer 2.11. *Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi, dokazati da važi nejednakost*

$$\frac{9abc}{2(a+b+c)} \leq \frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Rešenje: Da bi smo dokazali levu nejednakosti, primenimo najpre (GA) nejednakost za brojeve $\dfrac{ab^2}{a+b}$, $\dfrac{bc^2}{b+c}$, $\dfrac{ca^2}{c+a}$, čime se dobija da je

$$\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}\overset{\text{(A−G)}}{\geq} 3\left(\frac{ab^2\,bc^2\,ca^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^{1/3}=\frac{3\,a\,b\,c}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}. \tag{2.8}$$

S druge strane, iz (GA) nejednakost za brojeve $a+b, a+c, b+c$, imamo da je

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\overset{\text{(G−A)}}{\leq}\frac{a+b+b+c+c+a}{3}=\frac{2}{3}\,(a+b+c),$$

odnosno

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\geq\frac{3}{2\,(a+b+c)},$$

što zajedno sa (2.8) daje levu nejednakost:

$$\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}\geq\frac{9abc}{2(a+b+c)}.$$

Pokažimo sada desnu nejednakost. Najpre, primenom nejednakosti (HA), imamo da je

$$\frac{2}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}\overset{\text{(H−A)}}{\leq}\frac{b^2+ab}{2},\qquad \frac{2}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}}\overset{\text{(H−A)}}{\leq}\frac{c^2+bc}{2},\qquad \frac{2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ac}}\overset{\text{(H−A)}}{\leq}\frac{a^2+ac}{2}.$$

Dakle, onda je

$$\begin{aligned}\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a} &= \frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}+\frac{1}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}}+\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ac}}\\ &\leq \frac{b^2+ab}{4}+\frac{c^2+bc}{4}+\frac{a^2+ac}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}+\frac{ab+bc+ac}{4}\end{aligned}$$

Dalje, prema (1.2), prethodna nejednakost postaje

$$\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Ovim je pokazana i desna strana nejednakosti. △

Primer 2.12. *Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokazati da* je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leq\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}.$$

Rešenje: Ako uvedemo smenu $x=a/b$, $y=b/c$, $z=c/a$, treba zapravo pokazati da za proizvoljne pozitivne realne brojeve x, y, z takve da je $x\,y\,z=1$ važi nejednakost

$$x+y+z\leq x^2+y^2+z^2\,.$$

Zaista, na osnovu nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine imamo da je

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\overset{\text{(K−A)}}{\geq}\frac{x+y+z}{3}$$

odnosno

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} = (x+y+z)\cdot\frac{x+y+z}{3} \overset{(A-G)}{\geq} (x+y+z)\sqrt[3]{x\,y\,z} = x+y+z\,. \qquad \triangle$$

Primer 2.13. *Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi čiji je zbir jednak 1. Dokazati da za svaki pozitivan broj a važi nejednakost*

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+...+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geq \frac{n^2}{2}.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+...+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} &\overset{(A-G)}{\geq} n\sqrt[n]{\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}\cdot\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}}\\
&= \frac{n}{\sqrt[n]{(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_n+x_1)}}\\
&\geq \frac{n}{\frac{(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+\ldots+(x_n+x_1)}{n}}\\
&= \frac{n^2}{2(x_1+x_2+\ldots+x_n)} = \frac{n^2}{2}. \quad \triangle
\end{aligned}$$

Primer 2.14. *Rešiti jednačinu* $2^{x^5}+4^{x^4}+256^4 = 3\cdot 16^{x^3}$.

Rešenje: Primenom (GA) nejednakosti imamo

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4 \overset{(A-G)}{\geq} 3\sqrt[3]{2^{x^5}\cdot 4^{x^4}\cdot 256^4} = 3\,\sqrt[3]{2^{x^5+2x^4+32}}\,. \tag{2.9}$$

Takođe,

$$x^5+2x^4+32 \overset{(A-G)}{\geq} 3\sqrt[3]{x^5\cdot 2x^4\cdot 32} = 12x^3 \quad\Longrightarrow\quad 2^{x^5+2x^4+32} \geq 2^{12x^3}\,. \tag{2.10}$$

Iz (2.9) i (2.10) sada je

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4 \geq 3\sqrt[3]{2^{12x^3}} = 3\cdot 2^{4x^3} = 3\cdot 16^{x^3}\,.$$

U nejednakostima (2.9) i (2.10), jednakost važi ako i samo ako je $x^5 = 2x^4 = 32$, tj. ako je $x = 2$, što dakle, predstavlja rešenje date jednačine. $\triangle$

Primer 2.15. *Rešiti nejednačinu* $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}} > 2^{1+\sqrt[6]{x}}$.

Rešenje: Oblast definisanosti date nejednačine je $D = [0,+\infty)$. Ako uvedemo smenu $a = \sqrt[12]{x} \geq 0$, dobija se nejednačina

$$2^a + 2^{a^3} > 2^{1+a^2}\,. \tag{2.11}$$

Primenom (GA) nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}
2^a+2^{a^3} &\overset{(A-G)}{\geq} 2\cdot\sqrt{2^a\cdot 2^{a^3}} = 2\cdot\sqrt{2^{a+a^3}}\,,\\
a^3+a &\overset{(A-G)}{\geq} 2\sqrt{a\cdot a^3} = 2a^2
\end{aligned}$$

Onda je

$$2^a+2^{a^3} \geq 2\cdot\sqrt{2^{2a^2}} = 2^{1+a^2}\,. \tag{2.12}$$

Dakle, pokazali smo da za svako $a \geq 0$, važi nejednakost (2.12), pri čemu jednakost važi akko je $a = a^3$, tj. akko je $a = 0$ ili $a = 1$. Kako je $a = 0 \Leftrightarrow x = 0$ i $a = 1 \Leftrightarrow x = 1$, rešenje nejednačine (2.11) je $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$. $\triangle$

Primer 2.16. *Rešiti jednačinu $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.*

Rešenje: Primenom (GA) nejednakost je

$$x^4 + y^4 + 1 + 1 \overset{(A-G)}{\geq} 4\sqrt[4]{x^4 y^4} = 4|x| \cdot |y| \geq 4xy\,,$$

pri čemu jednakost važi kada je $x^4 = y^4 = 1$. Dakle, rešenja jednačine su $(x,y) \in \{(1,1),(-1,-1)\}$. $\triangle$

Primer 2.17. *U skupu celih brojeva rešiti jednačinu* $\dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{xz}{y} = 3\,.$

Rešenje: Pre svega, $x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Onda, imamo jednačinu oblika $(xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 = 3xyz$, odakle sledi da je $xyz > 0$. Kako je $xyz \in \mathbb{Z}$, to je $xyz \geq 1$. Sada primenimo (GA) nejednakost na brojeve $(xy)^2$, $(yz)^2$, $(xz)^2$ i dobijamo da je

$$3xyz = (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 \overset{(A-G)}{\geq} 3\sqrt[3]{(xy)^2 \cdot (yz)^2 \cdot (xz)^2} = 3xyz\sqrt[3]{xyz} \quad \Longrightarrow \quad xyz \leq 1\,.$$

Dakle, $xyz = 1$. Prema tome, rešenja jednačine u skupu celih brojeva su

$$(x,y,z) \in \{(1,1,1),(-1,-1,1),(-1,1,-1),(1,-1,-1)\}. \qquad \triangle$$

Primer 2.18. *Za koje vrednosti parametra a postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da su brojevi*

$$A = 5^{1+x} + 5^{1-x}, \quad B = \frac{a}{2}, \quad C = 25^x + 15^{-x}$$

tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

Rešenje: Kako je $A, B > 0$, imamo

$$A = 5\left(5^x + \frac{1}{5^x}\right) \overset{(A-G)}{\geq} 5 \cdot 2 = 10 \qquad C = 25^x + \frac{1}{25^x} \overset{(A-G)}{\geq} 2\,.$$

Brojevi A, B, C su tri uzastopna člana aritmetičkog niza ako je $A + C = 2B$, pa je

$$a = A + C \geq 10 + 2 = 12\,.$$

Dakle, za $a \geq 12$ postoji traženo x. $\triangle$

3. Geometrijske nejednakosti

Široku klasu nejednakosti koje se sreću u primenama čine geometrijske nejednakosti. Pod geometrijskom nejednakošću se najčešće podrazumeva ona nejednakost koja važi za elemente trougla ili neke druge geometrijske figure (četvrougla, kupe, valjka, lopte, itd.).

3.1. Nejednakosti za elemente trougla

Neka su a, b, c stranice trougla ABC, α, β, γ njima odgovarajući uglovi trougla, h_a, h_b, h_c njima odgovarajuće visine, t_a, t_b, t_c odgovarajuće težišne duži, r i R, redom, poluprečnici upisane i opisane kružnice za dati trougao i s poluobim trougla. Dokazaćemo neke interesantne nejednakosti koje važe između ovih elemenata proizvoljnog trougla.

Primer 3.1. *Nejednakost*

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) \tag{3.1}$$

je potreban i dovoljan uslov da se dužima čije su veličine a, b, c može konstruisati trougao.

Rešenje: Ako uvedemo oznake $x = b + c - 1$, $y = a + c - b$, $z = a + b - c$, tada je

$$a = \frac{y+z}{2}, \ b = \frac{x+z}{2}, \ c = \frac{x+y}{2}.$$

Sada, nejednakost (3.1) možemo zapisati u ekvivalentno obliku $xyz(x + y + z) > 0$, tj.

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c) > 0\,. \tag{3.2}$$

($\Longrightarrow$:) Ako su a, b, c dužine stranica trougla, tada je

$$b + c > a, \quad a + c > b, \quad a + b > c \quad \Longrightarrow \quad (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) > 0\,,$$

odakle sledi da važi nejednakost (3.2).

($\Longleftarrow$:) Ako važi nejednakost (3.1), odnosno (3.2), tada kako je $a + b + c > 0$ imamo dva slučaja:

(i) $b + c > a, \quad a + c > b, \quad a + b > c$

ili

(ii) dva od izraza $b + c - a$, $a + c - b$, $a + b - c$ su negativna.

Ako važi (ii), npr. $b + c - a > 0, \quad a + c - b < 0, \quad a + b - c < 0$, sabiranjem poslednje dve nejednakosti dobija se da je $a < 0$, što je suprotno pretpostavci da je a dužina duži tj. pozitivna vrednost. Ako važi (i) , dužima a, b, c može se konstruisati trougao. $\triangle$

Primer 3.2. *Dokazati da važi nejednakost:*

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \le 2\sqrt{3}\, r\, R\,.$$

Rešenje: Polazimo od (AK) nejednakosti za stranice datog trougla

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \overset{\text{(K−A)}}{\ge} \frac{a + b + c}{3} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ge \frac{2\sqrt{3}}{3}\, s,$$

odakle je

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \le \frac{\sqrt{3}}{2\, s} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a\, b\, c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \le \frac{\sqrt{3}}{2\, s}\, a\, b\, c.$$

Znajući da je

$$P = r\, s = \frac{a\, b\, c}{4R}, \quad \text{tj.} \;\; a\, b\, c = 4\, R\, P = 4\, R\, r\, s$$

gde je P površina trougla, iz prethodne nejednakosti sledi da je

$$\frac{a\, b\, c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \le \frac{\sqrt{3}}{2\, s}\, 4\, R\, r\, s = 2\sqrt{3}\, r\, R. \qquad \triangle$$

Primer 3.3. *Dokazati da važi nejednakost:*

$$a\,\sin\alpha + b\,\sin\beta + c\,\sin\gamma \geq 9r\,.$$

Rešenje: Iz formula za površinu trougla:

$$P = \frac{r}{2}\,(a+b+c) = \frac{ab}{2}\,\sin\gamma = \frac{bc}{2}\,\sin\alpha = \frac{ac}{2}\,\sin\beta$$

zaključujemo da je

$$\begin{aligned} a\,\sin\alpha + b\,\sin\beta + c\,\sin\gamma &= a\cdot\frac{2P}{bc} + b\cdot\frac{2P}{ac} + c\cdot\frac{2P}{ab} \\ &= 2P\,\frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = r\,(a+b+c)\,\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Primenom nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine imamo da je

$$a+b+c \overset{\text{(A−G)}}{\geq} 3\,\sqrt[3]{a\,b\,c}, \quad a^2+b^2+c^2 \overset{\text{(A−G)}}{\geq} 3\,\sqrt[3]{a^2\,b^2\,c^2}\,,$$

tako da se množenjem prethodnih nejednakosti dobija

$$(a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2) \geq 9\,\sqrt[3]{a^3\,b^3\,c^3} = 9\,a\,b\,c\,. \tag{3.4}$$

Sada, iz (3.3) i (3.4) sledi

$$a\,\sin\alpha + b\,\sin\beta + c\,\sin\gamma \geq 9\,r. \qquad \triangle$$

Primer 3.4. *Dokazati da važe nejednakosti:*

$$P \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}\,, \qquad s \geq 3\,\sqrt{3}\,r\,.$$

Rešenje: Iz Heronovog obrazca za površinu trougla $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, imamo da je

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s}. \tag{3.5}$$

S druge strane, primenom (GA) nejednakosti za pozitivne brojeve $s-a, s-b, s-c$, dobija se

$$(s-a)(s-b)(s-c) \overset{\text{(G−A)}}{\leq} \left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{3s-(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{3s-2s}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27}\,.$$

Dakle, prema (3.5) sada sledi da je $P^2 \leq \dfrac{s^4}{27}$, tj. $P \leq \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$. Kako je $P = r\,s$, iz prethodne nejednakosti dobija sa $s \geq 3\sqrt{3}\,r\,.$

Primer 3.5. *Dokazati da važi nejednakost:*

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Rešenje: Iz nejednakosti harmonijske i aritmetičke sredine za dva pozitivna broja

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2}, \quad x,\ y > 0\,,$$

sledi da važi nejednakost

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y},\qquad x,\ y>0\,.$$

Primenimo ove nejednakosti za svaki od sledećih parova pozitivnih brojeva

$$\frac{1}{s-a},\frac{1}{s-b}\quad;\quad\frac{1}{s-a},\frac{1}{s-c}\quad;\quad\frac{1}{s-b},\frac{1}{s-c}\,.$$

Dobijamo sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}&\geq\frac{4}{s-a+s-b}=\frac{4}{2s-(a+b)}=\frac{4}{a+b+c-(a+b)}=\frac{4}{c}\,,\\ \frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-c}&\geq\frac{4}{s-a+s-c}=\frac{4}{b},\quad\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq\frac{4}{s-b+s-c}=\frac{4}{a}\,.\end{aligned}$$

Sabiranjem dobijenih nejednakosti, imamo da je

$$2\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

odakle očigledno sledi tražena nejednakost. $\triangle$

Primer 3.6. *Dokazati da važi nejednakost:*

$$\frac{s(s-a)}{a^2}+\frac{s(s-b)}{b}^2+\frac{s(s-c)}{c^2}\geq\frac{9}{4}\,.$$

Rešenje: Koristeći činjenicu da je $(x+y)^2\geq 4xy$, imamo da je

$$\frac{s(s-a)}{a^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-1}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4a^2}\geq\frac{4bc-a^2}{4a^2}=\frac{bc}{a^2}-\frac{1}{4}\,.$$

Analogno je

$$\frac{s(s-b)}{b^2}\geq\frac{ac}{b^2}-\frac{1}{4},\qquad\frac{s(s-c)}{c^2}\geq\frac{ab}{c^2}-\frac{1}{4}\,.$$

Sabiranjem dobijenih nejednakosti, dobija se

$$\begin{aligned}\frac{s(s-a)}{a^2}+\frac{s(s-b)}{b^2}+\frac{s(s-c)}{c^2}\quad&\geq\quad\frac{bc}{a^2}-\frac{1}{4}+\frac{ac}{b^2}-\frac{1}{4}+\frac{ab}{c^2}-\frac{1}{4}\\ &\stackrel{\text{(A−G)}}{\geq}\quad 3\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}\cdot\frac{ac}{b^2}\cdot\frac{ab}{c^2}}-\frac{3}{4}=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\,.\end{aligned}$$ $\triangle$

Primer 3.7. *Dokazati da za uglove trougla važe sledeće nejednakosti:*

$$\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{8},\tag{3.6}$$

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\leq\frac{1}{8},\tag{3.7}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3}{2}\sqrt{3},\tag{3.8}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\gamma}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8},\tag{3.9}$$

$$1<\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2},\tag{3.10}$$

Rešenje: **(3.6):** Kako je

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\,c}} &= \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4\,b\,c}}\\
\sin\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{a\,c}} &= \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{4\,a\,c}}\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{a\,b}} &= \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{4\,a\,b}}
\end{aligned}$$

dobija se

$$\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)^2\,(b+c-a)^2\,(a+c-b)^2}{64\,a^2b^2c^2}}\,.$$

Kako su $a+b-c,\ b+c-a,\ a+c-b$ pozitivni brojevi, dobijamo

$$\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b-c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)}{8\,a\,b\,c}\,. \tag{3.11}$$

Ako su $a,\ b,\ c$ stranice trougla, tada je

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2} \le \sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{b^2-(c-a)^2} \le b, \quad \sqrt{c^2-(a-b)^2} \le c\,,$$

tj.

$$\sqrt{(a+b-c)\,(a-b+c)} \le a\,, \quad \sqrt{(b+c-a)\,(b-c+a)} \le b\,, \quad \sqrt{(c+a-b)\,(c-a+b)} \le c$$

Množenjem prethodnih nejednakosti imamo da je

$$\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(a+c-b)^2} \le a\,b\,c\,,$$

odnosno

$$(a+b-c)\,(b+c-a)\,(a+c-b) \le a\,b\,c\,. \tag{3.12}$$

Sada iz (3.11) i (3.12) sledi

$$\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}\,,$$

čime smo pokazali (3.6).

(3.7): Iz jednakosti

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2}\,,$$

i (3.6) sledi da je

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le 1 + 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}\,. \tag{3.13}$$

Na osnovu (GA) nejednakosti imamo da je

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma \le \Big(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\Big)^3\,,$$

tako da iz nejednakosti (3.13), onda sledi da je

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma \le \frac{1}{3^3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\,.$$

Dakle, važi i nejednakost (3.7).

(3.8): Kako je prema sinusnoj teoremi

$$\sin\alpha = \frac{a}{2\,R}, \quad \sin\beta = \frac{b}{2\,R}, \quad \sin\gamma = \frac{c}{2\,R},$$

nejednakost (3.8) se svodi na

$$\frac{a+b+c}{2\,R} \le \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad \text{tj.} \quad a+b+c \le 3\sqrt{3}\,R\,. \tag{3.14}$$

Da bi pokazali ovu nejednakost polazimo od identiteta

$$a^2+b^2+c^2 = 8\,R^2 + 8\,R^2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma \tag{3.15}$$

i nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \le a^2+b^2+c^2\,.$$

Dakle, imamo da je

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \le 8\,R^2 + 8\,R^2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\,.$$

Iz prethodne nejednakosti i (3.7) dobija se da je

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \le 8\,R^2 + 8\,R^2\cdot\frac{1}{8} = 9\,R^2\,. \tag{3.16}$$

odakle očigledno sledi da zaista važi (3.14).

(3.9): Korišćenjem trigonometrijskog identiteta

$$\cos\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

i nejednakosti (3.8) dobija se

$$\cos\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{4}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}\sqrt{3}\,.$$

(3.10): Korišćenjem identiteta

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 1+\cos\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\gamma}{2}$$

neposredno sledi leva nejednakost, dok se desna nejednakost dobija primenom (3.6). △

Primer 3.8. *Dokazati da za uglove trougla važe sledeće nejednakosti:*

$$\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\gamma \ge 3\sqrt{3}\,, \qquad 0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}\,; \tag{3.17}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \ge 1\,; \tag{3.18}$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2} \ge 9\,. \tag{3.19}$$

Rešenje: **(3.17):** Polazeći od identiteta $\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma$, i koristeći (GA) nejednakost $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma \ge 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\gamma}$, dobija se

$$\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\gamma \overset{\text{(G−A)}}{\le} 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\gamma}, \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg}^3\alpha\,\operatorname{tg}^3\beta\,\operatorname{tg}^3\gamma \ge 27\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\gamma,$$

odnosno,

$$\operatorname{tg}^2\alpha\,\operatorname{tg}^2\beta\,\operatorname{tg}^2\gamma \ge 27, \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\gamma \ge 3\sqrt{3}\,.$$

(3.18): Ako u identitetu

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1\,, \tag{3.20}$$

uvedemo oznake $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, imamo da je $xy+yz+zx=1$. Koristeći dobro poznatu nejednakost

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\,,$$

dobija se $x^2+y^2+z^2\geq 1$, što je i trebalo pokazati.

(3.19): Ako uvedemo oznake x,y,z kao u prethodnom dokazu i primenimo (HA) nejednakost, dobija se

$$\frac{xy+yz+xz}{3}\overset{(\mathrm{A-H})}{\geq}\frac{3}{\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}}\,.$$

Onda iz identiteta (3.20) koji sa uvedenim oznakama ima oblik $xy+yz+zx=1$, imamo da je

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\geq 9 \iff \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\geq 9\,.$$

Sabiranjem nejednakosti

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2} &\geq 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},\\
\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2} &\geq 2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},\\
\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2} &\geq 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},
\end{aligned}$$

dobija se

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}\geq \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\geq 9\,. \qquad \triangle$$

Primer 3.9. *Dokazati da za elemente trougla važe nejednakosti*

$$6\,r\sqrt{3}\leq a+b+c\leq 3R\sqrt{3}\,. \tag{3.21}$$

Rešenje: Iz (GA) nejednakosti imamo da je

$$\sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}\overset{(\mathrm{G-A})}{\leq}\frac{a+b-c+b+c-a+a+c-b}{3}=\frac{a+b+c}{3}\,,$$

odnosno

$$27\,(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)\leq (a+b+c)^3\,.$$

Kako je $a+b-c=2(s-c)$, $b+c-a=2(s-a)$, $a+c-b=2(s-b)$, prethodna nejednakost postaje

$$216\,(s-a)(s-b)(s-c)\leq (a+b+c)^3=2s\,(a+b+c)^2\,. \tag{3.22}$$

Korišćenjem Heronovog obrasca i jednakosti $P=r\,s$ dobija se

$$216\,(s-a)(s-b)(s-c)=216\,\frac{P^2}{s}=216\,r^2\,s\,,$$

što zajedno sa (3.22) daje $108\,r^2\leq (a+b+c)^2$, odakle direktno sledi leva nejednakost. Desna nejednakost je pokazana u Primeru 3.7. (videti (3.14)). $\triangle$

Primer 3.10. *Prečnik kruga upisanog u trougao najviše je jednak poluprečniku kruga opisanog oko istog trougla.*
Rešenje: Na osnovu prethodnog primera je $6r\sqrt{3} \le 3R\sqrt{3}$, tj. $2r \le R$. △

Primer 3.11. *Dokazati da za elemente trougla važe nejednakosti*

$$\sqrt{3}\,P \le (R+r)^2\,, \tag{3.23}$$

$$(a\,b\,c)^2 \ge \Big(\frac{4P}{\sqrt{3}}\Big)^3\,, \tag{3.24}$$

$$a\,b\,c \le (R\sqrt{3})^3\,. \tag{3.25}$$

$$4\sqrt{3}\,P \le a^2+b^2+c^2 \le 9R^2\,. \tag{3.26}$$

U ovim nejednakostima važi znak jednakosti ako i samo ako je trougao jednakostraničan.
Rešenje: **(3.23):** Kako je $a+b+c \le 3\sqrt{3}\,R$ prema Primeru 3.9., imamo da je

$$R \ge \frac{2\,s}{3\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad R+r \ge \frac{s}{3\sqrt{3}}+\frac{s}{3\sqrt{3}}+r = \frac{1}{3}\Big(\frac{s}{\sqrt{3}}+\frac{s}{\sqrt{3}}+3\,r\Big)\,.$$

Primenjujući sada odnos između aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve $\frac{s}{\sqrt{3}}$, $\frac{s}{\sqrt{3}}$, $3\,r$, iz prethodne nejednakosti se dobija

$$R+r \ge \Big(\frac{s}{\sqrt{3}}\cdot\frac{s}{\sqrt{3}}\cdot 3\,r\Big)^{1/3} = (s^2r)^{1/3} = (s\,P)^{1/3}\,. \tag{3.27}$$

U Primeru 3.5. smo pokazali da važi $s^2 \ge 3\sqrt{3}\,P$, tako da iz (3.27) sada sledi da je

$$(R+r)^2 \ge (s^2P^2)^{1/3} \ge (3\sqrt{3}\,P^3)^{1/3} = (3^{3/2}P^3)^{1/3} = \sqrt{3}\,P\,.$$

(3.24): Iz nejednakosti $a+b+c \le 3\sqrt{3}\,R$, tj. $2s \le 3\sqrt{3}\,R$, korišćenjem identiteta $abc = 4RP$ dobija se

$$\frac{4P}{\sqrt{3}} = \frac{abc}{R\sqrt{3}} \le \frac{3abc}{2s} = \frac{3abc}{a+b+c}\,. \tag{3.28}$$

(GA) nejednakost za stranice trougla daje $\frac{a+b+c}{3} \ge (abc)^{1/3}$, tj. $\frac{3}{a+b+c} \le (abc)^{-1/3}$, što zajedno sa (3.28) daje

$$\frac{4P}{\sqrt{3}} \le (abc)^{2/3}$$

odakle direktno sledi nejednakost (3.24).
(3.25): Iz (GA) nejednakosti za stranice trougla i nejednakosti (3.21) sledi

$$3(abc)^{1/3} \overset{\text{(G−A)}}{\le} a+b+c \le 3\sqrt{3}\,R\,,$$

odakle direktno sledi nejednakost (3.25).
(3.26): Iz nejednakosti između kvadratne i geometrijske sredine za stranice trougla i nejednakosti (3.24) je

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge (abc)^{2/3} \ge \frac{4P}{\sqrt{3}}\,,$$

odakle se dobija leva strana nejednakosti (3.26), tj. $4\sqrt{3}P \le a^2+b^2+c^2$. Desna strana nejednakosti direktno sledi iz identiteta (3.15) i nejednakosti (3.7) pokazane u Primeru 3.7. △

Primer 3.12. *Dokazati da važe nejednakosti:*

$$h_a h_b h_c \geq 27 r^3, \qquad h_a + h_b + h_c \geq 9r\,.$$

Rešenje: Iz obrazaca za površinu trougla:

$$P = \frac{r}{2}\,(a+b+c) = \frac{a\,h_a}{2} = \frac{b\,h_b}{2} = \frac{c\,h_c}{2}$$

dobijamo da je

$$r = \frac{2P}{a+b+c}, \quad h_a\,h_b\,h_c = \frac{2P}{a}\cdot\frac{2P}{b}\cdot\frac{2P}{c} = \frac{8\,P^3}{a\,b\,c}\,.$$

Dakle, prva nejednakost se svodi na

$$\frac{8\,P^3}{a\,b\,c} \geq 27\,\frac{8\,P^3}{(a+b+c)^3} \quad \text{tj.} \quad (a+b+c)^3 \geq 27\,a\,b\,c\,.$$

Prethodna nejednakost je tačna, na osnovu nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine za stranice trougla, odnosno, $(a+b+c)/3 \geq (a\,b\,c)^{1/3}$.

Da bi pokazali drugu nejednakost primetimo da je

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2\,P} = \frac{1}{r}\,,$$

odakle na osnovu nejednakosti harmonijske i aritmetičke sredine sledi data nejednakost

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{3} \overset{\text{(A−H)}}{\geq} \frac{3}{\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}} = \frac{3}{\dfrac{1}{r}} = 3\,r\,. \qquad \triangle$$

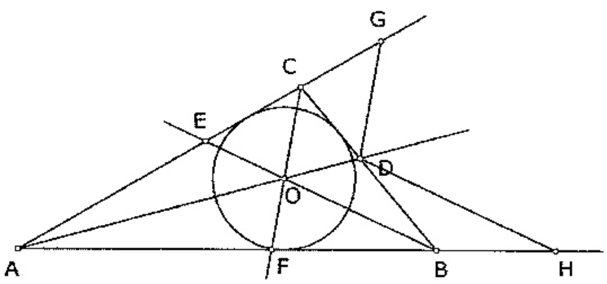
Primer 3.13. *Ako je O centar upisanog kruga u $\triangle ABC$, D, E, F su redom tačke preseka simetrala uglova α, β, γ sa stranicama a, b, c, tada je*

$$\frac{OA}{OD} + \frac{OB}{OE} + \frac{OC}{OF} \;\geq\; 6\,, \tag{3.29}$$

$$\frac{OA}{OD} \cdot \frac{OB}{OE} \cdot \frac{OC}{OF} \;\geq\; 8\,. \tag{3.30}$$

Rešenje: Neka je G tačka koja pripada pravoj AC takva da je $CG = CD$, a H tačka koja pripada pravoj AB takva da je $BH = BD$ (Slika 1.). Tada je $\triangle AOC \sim \triangle ADG$, odakle sledi da je

$$\frac{OA}{OD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC - CD} \quad \Longrightarrow \quad \frac{OA}{OD} = \frac{AC + AB}{CD + BC - CD} = \frac{AC + AB}{BC} = \frac{b+c}{a}\,.$$



Slika 1.

Slično, iz sličnosti trouglova ABO i AHD važi da je

$$\frac{OB}{OE}=\frac{c+a}{b}, \qquad \frac{OC}{OF}=\frac{a+b}{c}.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobija se

$$\frac{OA}{OD}+\frac{OB}{OE}+\frac{OC}{OF}=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)}{abc}.$$

Primenom nejednakosti (2.4) koja je pokazana u Primeru 2..9. dobija se

$$\frac{OA}{OD}+\frac{OB}{OE}+\frac{OC}{OF}\geq\frac{6\,abc}{abc}=6\,.$$

Takođe, imamo da je

$$\frac{OA}{OD}\cdot\frac{OB}{OE}\cdot\frac{OC}{OF}=\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}=\frac{2abc+bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)}{abc}\geq\frac{8\,abc}{abc}=8\,. \quad \triangle$$

3.2. Stereometrijske nejednakosti

Primer 3.14. (Ptolomejeva nejednakost) *Neka su A,B,C,D bilo koje četiri tačke u ravni. Tada važi nejednakost*

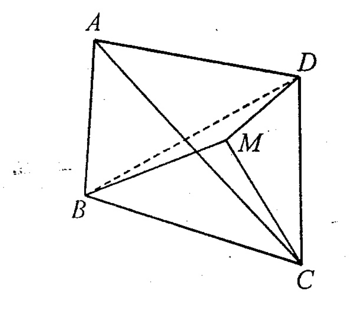
$$AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD\,.$$

Jednakost važi ako i samo ako je četvorougao $ABCD$ tetivni sa dijagonalama AC i BD ili su tačke A,B,C,D kolinearne, pri čemu jedna od tačaka B i D leži između tačaka A i C, a druga ne.

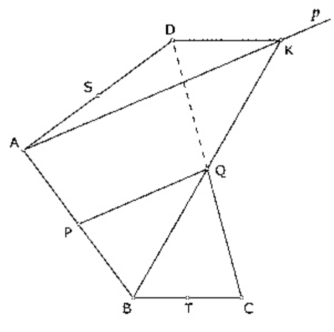
Rešenje: Neka je M tačka u ravni takva da su $\triangle CMB$ i $\triangle CDA$ slični i isto orjentisani (Slika 2.). Tada je

$$\frac{CM}{BC}=\frac{CD}{AC},\quad \sphericalangle BCM=\sphericalangle ACD \iff \frac{CM}{DC}=\frac{CB}{AC},\quad \sphericalangle DCM=\sphericalangle ACB \implies \triangle CMD\sim\triangle CBA\,,$$

odakle sledi da je $BM=\dfrac{BC\cdot AD}{AC}$, $MD=\dfrac{CD\cdot AB}{AC}$, pa iz nejednakosti trougla $BM+MD\geq BD$ sledi Ptolomejeva nejednakost.



Slika 2.



Slika 3.

Da bi važila jednakost, tačke B,M,D moraju biti kolinearne, a kako je u tom slučaju $\sphericalangle CBD=\sphericalangle CAD$, četvorougao $ABCD$ je tetivni, ili važi poslednji uslov naveden u formulaciji tvrđenja. $\triangle$

Primer 3.15. (Ptolomejeva nejednakost) *Ako su P,Q,R,T redom sredine stranica AB,CD,DA, BC prostornog četvorougla $ABCD$, tada je*

$$BC-AD<2\cdot PQ<BC+AD, \qquad AB-CD<2\cdot ST<AB+CD\,.$$

Rešenje: Neka prava p prolazi kroz tačku A i paralelna je sa pravom PQ, K presek prave p i prave BQ (Slika 3.). Tada je

$$CQ = QD,\ \ \sphericalangle DQK = \sphericalangle BQC,\ \ BQ = QK \quad \Longrightarrow \quad \triangle BQC \cong \triangle KQD \quad \Longrightarrow \quad DK = BC\,.$$

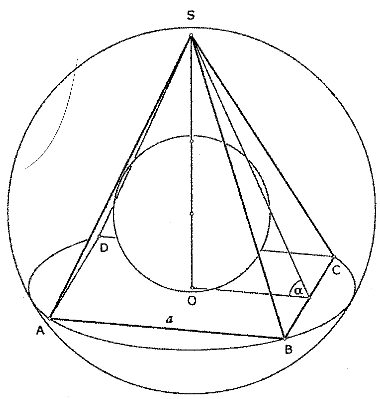
U $\triangle ADK$ važi $DK + AD > AK = 2\,PQ$ i $DK - AD < AK = 2\,PQ$, odnosno $BC + AD > 2\,PQ$ i $BC - AD < 2\,PQ$. Slično se pokazuje i druga nejednakost. $\triangle$

Primer 3.16. *Ako je R poluprečnik opisane i r poluprečnik upisane sfere pravilne četvorostrane piramide, tada je*

$$R \geq (1+\sqrt{2})\,r\,.$$

Rešenje: Neka je a osnovna ivica date piramide $SABCD$, α ugao nagiba bočne strane prema ravni osnove i H visina piramide (Slika 4.). Za poluprečnik sfere opisane oko piramide važi

$$R^2 = (H-R)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{H^2 + \frac{a^2}{2}}{2H}\,. \tag{3.31}$$



Slika 4.

Kako je $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{2H}{a}$, iz (3.31) imamo da je $R = \dfrac{a}{4}\cdot\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha + 2}{\mathrm{tg}\alpha}$. Uzevši u obzir da je $r = \dfrac{a}{2}\cdot \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, dobija se

$$\frac{R}{r} = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha + 2}{2\cdot \mathrm{tg}\alpha\cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\,. \tag{3.32}$$

Iz

$$\frac{[(\sqrt{2}+1)t-1]^2}{2t(1-t)} > 0 \ \text{ za svako } t\in(0,1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1+t^2}{2t(1-t)} \geq 1+\sqrt{2}\,, \quad t\in(0,1)\,.$$

Ako uzmemo da je $t = \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$, uzevši u obzir da je $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, dobija se

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{2} \ &\leq\ \frac{1+\mathrm{tg}^4\dfrac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1-2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^4\dfrac{\alpha}{2}+2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\left(1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)} \\ &=\ \frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} + \frac{1}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\alpha}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2+\mathrm{tg}^2\alpha}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\alpha} = \frac{R}{r}\,. \qquad \triangle \end{aligned}$$

Primer 3.17. *Ako su a, b, c ivice, P površina, a V zapremina pravouglog paralelopipeda, onda važe nejednakosti*

$$216V^2 \leq P^3\,, \qquad P \leq \frac{2}{3}\,(a+b+c)^2\,.$$

Rešenje: Na osnovu nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve ab, bc, ca imamo

$$(ab+bc+ca)^3 \geq 27a^2b^2c^2\,,$$

odakle neposredno sledi prva nejednakost, jer je $P = 2(ab+bc+ca)$ i $V = abc$. Primetimo da jednakost važi ako i samo ako je $ab = bc = ca$, tj. $a = b = c$.

Površina pravouglog paralelopipida je

$$P = 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\,. \tag{3.33}$$

Kako je zbog (AK) nejednakosti

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \overset{(\mathrm{K-A})}{\geq} \frac{a+b+c}{3} \quad \text{tj.} \quad a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

iz (3.33) sledi druga nejednakost. $\triangle$

Primer 3.18. *Ako su r, h, V, M redom poluprečnik osnove pravog kružnog vajka, njegova visina, zapremina i površina omotača, onda važe nejednakosti*

$$V \leq \frac{4\pi}{27}(r+h)^3\,, \qquad M \leq \frac{\pi}{2}(r+h)^2\,, \qquad 54\pi\, V^2 \leq P^3.$$

Rešenje: Aritmetička sredina brojeva $r/2$, $r/2$ i h nije manja od njihove geometrijske sredine, tj.

$$\frac{r+h}{3} \geq \left(\frac{r^2h}{4}\right)^{1/3} = \left(\frac{V}{4\pi}\right)^{1/3},$$

odakle sledi prva od navedenih nejednakosti.

Druga nejednakost sledi iz (GA) nejednakosti za brojeve r i h, tj.

$$\frac{r+h}{2} \geq \sqrt{rh} = \left(\frac{M}{2\pi}\right)^{1/2}.$$

Kako je $P = 2\pi(r^2+rh)$ i $V = r^2\pi\, h$, imamo

$$P = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi\, r}\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{2\pi\, r} + \frac{V}{2\pi\, r}\right). \tag{3.34}$$

Koristeći (GA) nejednakost dobijamo

$$r^2 + \frac{V}{2\pi\, r} + \frac{V}{2\pi\, r} \geq 3\sqrt[3]{r^2 \cdot \frac{V}{2\pi\, r} \cdot \frac{V}{2\pi\, r}} = 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

odnosno prema (3.34) je

$$\frac{P^3}{8\pi^3} = \left(r^2 + \frac{V}{2\pi\, r} + \frac{V}{2\pi\, r}\right)^3 \geq 27\frac{V^2}{4\pi^2}\,.$$

odakle sledi i treća nejednakost. $\triangle$

Primer 3.19. *Neka je H visina, r poluprečnik srednjeg kruga prave zarubljene kupe. Najbolja moguća procena za zapreminu te kupe je*

$$H\, r^2\pi \leq V \leq \frac{4H\, r^2\, \pi}{3}\,.$$

Rešenje: Neka su r_1, r_2 poluprečnici osnova prave zarubljene kupe. Tada je $V = \frac{H\pi}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$. Primenom nejednakosti $\sqrt{r_1r_2} \leq \frac{r_1+r_2}{2} = r$, kako je $4r^2 = (r_1+r_2)^2$, dobija se

$$3r^2 = 4r^2 - r^2 \leq (r_1+r_2)^2 - r_1r_2 \leq 4r^2\,.$$

Kako je $(r_1+r_2)^2 - r_1r_2 = r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 = \frac{3V}{H\pi}$ iz prethodne nejednakosti direktno sledi data nejednakost. Data procena je najbolja moguća, jer za $r_1 = r_2 = r$ je $V = Hr^2\pi$, a za $r_1 = 0$ je $V = \frac{4H\,r^2\,\pi}{3}$. $\triangle$

4. Košijeva nejednakost i primena

Polazeći od nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine može se pokazati **Košijeva nejednakost** koja je dobro poznata i igra važnu ulogu u teoriji nejednakosti. U literaturi se ta nejednakost jos naziva i nejednakost Koši-Bunjakovskog ili Koši-Švarcova nejednakost ili nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovskog.

Teorema 4.1. [2]**(Košijeva nejednakost)** *Ako su date dve n-torke realnih brojeva $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$, tada važi*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k\,b_k|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \tag{4.1}$$

s jednakošću ako i samo ako je $\left|\frac{a_1}{b_1}\right| = \left|\frac{a_2}{b_2}\right| = \ldots = \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$.

Dokaz. Označimo sa

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \quad A_k = \frac{a_k}{\sqrt{A}}, \quad B_k = \frac{b_k}{\sqrt{B}}.$$

Dokažimo najpre da je

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{n} B_k^2 = 1. \tag{4.2}$$

Zaista,

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{A} = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \frac{A}{A} = 1,$$

i analogno se pokazuje i druga jednakost.

Kako prema (1.2) važi nejednakost

$$|\,A_kB_k\,| \leq \frac{A_k^2}{2} + \frac{B_k^2}{2},$$

za svako $k = 1, 2, \ldots, n$, sumiranjem tih nejednakosti i korišćenjem (4.2), dobija se

$$\sum_{k=1}^{n} |\,A_k\,B_k\,| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} B_k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \tag{4.3}$$

[2] A.L. Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

Kako je

$$\sum_{k=1}^{n} |\, A_k\, B_k \,| = \frac{1}{\sqrt{AB}} \sum_{k=1}^{n} |\, a_k\, b_k \,|$$

iz (4.3), zaključujemo da je

$$\sum_{k=1}^{n} |\, a_k\, b_k \,| \leq \sqrt{AB},$$

odnosno

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k\, b_k| \right)^2 \leq A\, B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right). \qquad \square$$

Geometrijski dokaz Košijeve nejednakosti: Za vektore

$$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad \overrightarrow{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\,,$$

je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \qquad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}, \quad |\overrightarrow{b}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\,.$$

Kako je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, iz činjenice da je $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \leq 1$, dobija se

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2},$$

odakle direktno sledi nejednakost (4.1) .

Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine može se pokazati kao direktna posledica Košijeve nejednakosti. Naime, neka je $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$. Tada je iz (4.1)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \sqrt{n\,(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}$$

odnosno

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}\,,$$

što predstavlja (AK) nejednakost, ako su $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Takođe, nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine je posledica Košijeve nejednakosti. Stavljajući u (4.1) da je $a_k^2 = x_k > 0$, $b_k^2 = \dfrac{1}{x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, dobijamo

$$n^2 = \left(\sqrt{x_1}\,\frac{1}{x_1} + \sqrt{x_2}\,\frac{1}{x_2} + \ldots + \sqrt{x_2}\,\frac{1}{x_2} \right)^2 \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right)\,,$$

odnosno

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}\,,$$

što predstavlja (HA) nejednakost.

Sledeća posledica Košijeve nejednakosti je zapravo specijalan slučaj nejednakosti Minkovskog (za $p = 2$), koja će biti pokazana u sledećem poglavlju (vidi Teoremu 5.6.).

Posledica 4.1. *Za proizvoljne n-torke realnih brojeva $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$, važi nejednakost*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\,. \tag{4.4}$$

Dokaz. Iz Košijeve nejednakosti se dobija da je

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k\, b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\,.$$

Ako se leva i desna strana prethodne nejednakosti pomnoži sa 2, a zatim im se doda $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2$ dobija se ,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + 2|a_k b_k| + b_k^2) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2,$$

odakle se dobija nejednakost (4.4). $\square$

Dokazaćemo nekoliko nejednakosti koristeći Košijevu nejednakost.

Primer 4.1. *Dokazati da za svako $x, y, z > 0$ važi nejednakost*

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \geq 9\,.$$

Rešenje: Stavljajući u Košijevu nejednakost da je $a_1 = \sqrt{x}$, $a_2 = \sqrt{y}$, $a_3 = \sqrt{z}$, $b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $b_2 = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, $b_3 = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$, dobijamo

$$\begin{aligned}(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) &= \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right) \\ &\geq \left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = 9\,. \quad \triangle\end{aligned}$$

Primer 4.2. *Neka je $a + b + c = 1$. Dokazati da je $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{1}{3}$.*
Rešenje: Iz Košijeve nejednakosti imamo

$$1^2 = (a + b + c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1 + 1 + 1)\,,$$

tj. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1/3$, što je i trebalo pokazati. $\triangle$

Primer 4.3. *Dokazati nejednakost $a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2$.*

Rešenje: Primenom Košijeve nejednakosti dobija se

$$a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq \sqrt{a^2 + \left(\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + c^2}\right)^2 + b^2} = a^2 + b^2 + c^2\,.$$

Primer 4.4. *Dokazati nejednakost* $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.

Rešenje:

$$ab+bc+ca \leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)} = a^2+b^2+c^2 \,. \qquad \triangle$$

Primer 4.5. *Dokazati nejednakost*

$$\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^k ,$$

gde su $n, k \in \mathbb{N}$, $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Rešenje: Označimo sa $A_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k$. Iz Košijeve nejednakosti je

$$A_{k+1}A_{k-1} = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\frac{k+1}{2}}\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\frac{k-1}{2}}\right)^2\right] \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{k+1}{2}}\, a_i^{\frac{k-1}{2}}\right)^2 = A_k^2 \,.$$

Analogno, dobijamo da je

$$\begin{aligned} A_kA_{k-2} &\geq A_{k-1}^2 \\ A_{k-1}A_{k-3} &\geq A_{k-2}^2 \\ \ldots\ldots \ &\ldots \ \ldots\ldots \\ A_2A_0 &\geq A_1^2 \end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\begin{aligned} A_kA_0 &\geq A_{k-1}A_1 \\ A_{k-1}A_0 &\geq A_{k-2}A_1 \\ \ldots\ldots \ &\ldots \ \ldots\ldots \\ A_2A_0 &\geq A_1\,A_1 \\ A_1A_0 &\geq A_0\,A_1 \,. \end{aligned}$$

Dakle,

$$A_k \geq A_{k-1}\cdot\frac{A_1}{A_0} \geq A_{k-2}\cdot\frac{A_1^2}{A_0^2} \geq A_{k-3}\cdot\frac{A_1^3}{A_0^3} \geq \ldots \geq A_0\cdot\frac{A_1^k}{A_0^k} \,.$$

Kako je $A_0 = n$, iz prethodne nejednakosti direktno sledi tražena nejednakost, tj. da je

$$\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^k . \quad \triangle$$

Napomena. Za proizvoljnu n-torku pozitivnih brojeva $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, veličina

$$\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}$$

naziva se **sredina reda** k. Dakle, prema prethodnom primeru vidimo da je sredina reda k veća ili jednaka od k-tog stepena aritmetičke sredine.

Primer 4.6. *Neka su* x, y, z *pozitivni realni brojevi, takvi da je* $x+y+z \geq 1$. *Dokazati da je*

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{x+z}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \,.$$

Rešenje: Primenom Košijeve nejednakosti na vektore

$$\left(\sqrt{xy+xz}, \sqrt{yz+xy}, \sqrt{xz+yz}\right), \qquad \left(\frac{x^{3/4}}{\sqrt{y+z}}, \frac{y^{3/4}}{\sqrt{x+z}}, \frac{z^{3/4}}{\sqrt{x+y}}\right),$$

dobija se

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{xy+xz}\cdot\frac{x^{3/4}}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{yz+xy}\cdot\frac{y^{3/4}}{\sqrt{x+z}} + \sqrt{xz+yz}\cdot\frac{z^{3/4}}{\sqrt{x+y}}\right)^2\\ &\le \left[\left(\sqrt{xy+xz}\right)^2 + \left(\sqrt{yz+xy}\right)^2 + \left(\sqrt{xz+yz}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{x^{3/4}}{\sqrt{y+z}}\right)^2 + \left(\frac{y^{3/4}}{\sqrt{x+z}}\right)^2 + \left(\frac{z^{3/4}}{\sqrt{x+y}}\right)^2\right]\end{aligned}$$

odnosno

$$\left(x^{5/4}+y^{5/4}+z^{5/4}\right)^2 \le 2(xy+yz+xz)\left(\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{x+z}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y}\right). \tag{4.5}$$

Dalje, koristeći nejednakost aritmetičke sredine i sredine reda 5/4 pokazane u prethodnom primeru, imamo

$$\left(\frac{x^{5/4}+y^{5/4}+z^{5/4}}{3}\right)^{4/5} \ge \frac{x+y+z}{3} \quad\Longrightarrow\quad \left(x^{5/4}+y^{5/4}+z^{5/4}\right)^2 \ge \frac{(x+y+z)^{5/2}}{\sqrt{3}}. \tag{4.6}$$

Najzad, iz nejednakosti dokazane u Primeru 4.4. direktno sledi da je

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz \ge 3(xy+yz+zx). \tag{4.7}$$

Iz (4.5), (4.6) i (4.7) dobija se

$$\begin{aligned}\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{x+z}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y} &\ge \frac{\left(x^{5/4}+y^{5/4}+z^{5/4}\right)^2}{2(xy+yz+xz)} \ge \frac{\dfrac{(x+y+z)^{5/2}}{\sqrt{3}}}{2\cdot\dfrac{(x+y+z)^2}{3}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y+z)^{1/2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \triangle\end{aligned}$$

U narednih nekoliko primera pokazaćemo neke geometrijske nejednakosti primenom Košijeve nejednakosti.

Primer 4.7. *Neka su a, b, c dužine stranica trougla. Dokazati da važi nejednakost*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2(c-a)\ge 0. \tag{4.8}$$

Rešenje: Neka je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$. Označimo sa $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$. Imamo da je

$$a=(s-b)+(s-c)=y+z, \qquad b=(s-c)+(s-a)=z+x, \qquad c=(s-a)+(s-b)=x+y,$$

tako da nejednakost (4.8) postaje

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\ge 0,$$

ili nakon sređivanja

$$xy^3+yz^3+zx^3 \ge xyz\,(x+y+z). \tag{4.9}$$

Stavljajući u Košijevu nejednakost za $n = 3$ da je

$$a_1 = \sqrt{yz^3},\ a_2 = \sqrt{zx^3},\ a_3 = \sqrt{xy^3}, \qquad b_1 = \sqrt{x},\ b_2 = \sqrt{y},\ b_3 = \sqrt{z}$$

dobija se

$$\left(\sqrt{yz^3}\cdot\sqrt{x} + \sqrt{zx^3}\cdot\sqrt{y} + \sqrt{xy^3}\cdot\sqrt{z}\right)^2 = \left(\sqrt{xyz}\,(x+y+z)\right)^2 \le (xy^3 + yz^3 + zx^3)(x+y+z),$$

tj.

$$xyz(x+y+z) \le xy^3 + yz^3 + zx^3\,.$$

što je nejednakost (4.9), čime je dokazana data nejednakost. △

Primer 4.8. *Dokazati da za svaki trougao važi nejednakost*

$$a\,t_a + b\,t_b + c\,t_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}\,(a^2 + b^2 + c^2)\,,$$

sa jednakošću ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

Rešenje: Stavljajući u Košijevu nejednakost da je

$$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c, \quad b_1 = t_a,\ b_2 = t_b,\ b_3 = t_c\,,$$

dobija se $(a\,t_a + b\,t_b + c\,t_c)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$, odnosno

$$a\,t_a + b\,t_b + c\,t_c \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{t_a^2+t_b^2+t_c^2}\,. \tag{4.10}$$

Neka su t'_a, t'_b, t'_c rastojanja između težišta T i redom temena A, B, C. Tada je

$$t_a = \frac{3}{2}t'_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\quad t_b = \frac{3}{2}t'_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2},\quad t_c = \frac{3}{2}t'_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2},$$

odakle sledi

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} + \frac{2c^2+2a^2-b^2}{4} + \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\,. \tag{4.11}$$

Sada iz (4.10) i (4.11) dobija se

$$a\,t_a + b\,t_b + c\,t_c \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)\,. \quad \triangle$$

Primer 4.9. *Neka je O proizvoljna tačka unutar oštrouglog trougla ABC i x, y, z rastojanja te tačke od stranica trougla, a R je poluprečnik kruga opisanog oko trougla. Dokazati da važi nejednakost*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le 3\sqrt{\frac{R}{2}}\,.$$

Rešenje: Stavljajući u Košijevu nejednakost za $n = 3$ da je

$$a_1 = \sqrt{ax},\ a_2 = \sqrt{by},\ a_3 = \sqrt{cz}, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{a}},\ b_2 = \frac{1}{\sqrt{b}},\ b_3 = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

dobija se

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 \le (ax + by + cz)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\,. \tag{4.12}$$

Kako je $ax+by+cz=2P$ i $P=\dfrac{abc}{4R}$, imamo iz (4.12)

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \le 2P\,\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{2R}\,.$$

Kako je $ab+bc+ac \le a^2+b^2+c^2$ (vidi Primer 4.4.), koristeći nejednakost (3.26) pokazanu u Primeru 3.11., koja glasi $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$, dobijamo iz prethodne nejednakosti

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \le \frac{9R^2}{2R} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le 3\sqrt{\frac{R}{2}}\,. \qquad \triangle$$

Primer 4.10. *Dat je tetraedar $ABCD$, njegove ivice AD, BD, CD su uzajamno normalne, pri čemu je $|AD|=a$, $|BD|=b$, $|CD|=c$. Neka prava l prolazi kroz tačku D i seče stranu ABC. Dokazati da suma rastojanja tačaka A,B,C od prave l manja ili jednaka od $\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$. Za koji položaj prave l važi znak jednakosti?*

Rešenje: Neka prava l seče stranu ABC u tački M. Neka je $\sphericalangle ADM=\alpha$, $\sphericalangle BDM=\beta$, $\sphericalangle CDM=\gamma$, a S suma rastojanja tačaka A,B,C od prave l. Tada je

$$S=a\,\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma\,.$$

Primenom Košijeve nejednakosti dobija se

$$(a\,\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma)^2\le(a^2+b^2+c^2)(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\,,$$

odnosno

$$S^2\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}\,.$$

Kako je $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, onda je $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$. Zato je $S\le\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$.

Jednakost važi ako i samo ako je $\dfrac{\sin\alpha}{a}=\dfrac{\sin\beta}{b}=\dfrac{\sin\gamma}{c}$, odakle dobijamo

$$\frac{\sin^2\alpha}{a^2}=\frac{\sin^2\beta}{b^2}=\frac{\sin^2\gamma}{c^2}=\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

Dobijene jednakosti važe u slučaju kada je $a^2\le b^2+c^2$, $b^2\le a^2+c^2$, $c^2\le a^2+b^2$. Tako, jednakost $S=\sqrt{2}\,D$, gde je $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, važi akko svaka od ivica AB, BC, AC tetraedra $ABCD$ nije manja od naspramne ivice i

$$\sin\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{D},\quad \sin\beta=\frac{b\sqrt{2}}{D},\quad \sin\gamma=\frac{c\sqrt{2}}{D}\,. \qquad \triangle$$

5. Jensenova nejednakost i primene

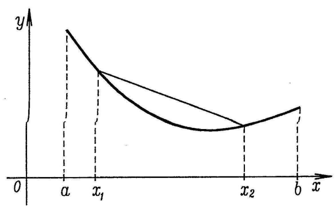
Kako je formulacija Jensenove nejednakosti povezana sa konveksnim funkcijama, podsetimo se definicije konveksne i konkavne funkcije.

Definicija 5.1. *Za funkciju $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ kažemo da je* **konveksna** *ako za svake dve tačke $x_1,x_2\in(a,b)$ i svaka dva nenegativna realna broja λ_1,λ_2 za koja je $\lambda_1+\lambda_2=1$ važi*

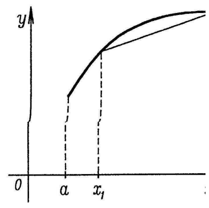
$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)\quad(\text{Slika 1a.}).\tag{5.1}$$

Funkcija f je **konkavna** *ako je funkcija $-f$ konveksna, tj. ako za svake dve tačke $x_1,x_2\in(a,b)$ i svaka dva nenegativna realna broja λ_1,λ_2 za koja je $\lambda_1+\lambda_2=1$ važi*

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\ge\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)\quad(\text{Slika 1b.}).\tag{5.2}$$



Slika 1a.



Slika 1b.

Teorema 5.1. *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna na (a, b).*
(a) *Funkcija f konveksna na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svako $x \in (a, b)$.*
(b) *Funkcija f konkavna na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

Teorema 5.2. **([3]Jensenova nejednakost)** *Ako je f koveksna funkcija na $[a, b]$, a $x_i \in [a, b]$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, onda važi nejednakost*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{2}, \tag{5.3}$$

a ako je f konkavna funkcija na $[a, b]$ važi nejednakost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{2}. \tag{5.4}$$

Jednakost u (5.3) i (5.4) važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots x_n$.

Važi i opštije tvrđenje:

Teorema 5.3. **(Jensenova nejednakost)** *Neka je f koveksna funkcija na $[a, b]$. Za proizvoljne brojeve $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}^+$, takve da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, važi nejednakost*

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\right) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \tag{5.5}$$

Ako je f konkavna funkcija na $[a, b]$ važi nejednakost

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\right) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \tag{5.6}$$

Kao direktna posledica Jensenove nejednakosti slede mnoge danas poznate nejednakosti, kao npr. Jangova nejednakost, Helderova nejednakost, nejednakost Minkovskog i mnoge druge.

Teorema 5.4. **([4]Jangova nejednakost)** *Neka su $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ realni brojevi takvi da je*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

i x, y nenegativni realni brojevi.
(a) *Ako je $p > 1$ i $q > 1$, tada važi nejednakost*

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq x\,y; \tag{5.7}$$

(b) *Ako je $p < 1$, $x > 0$, $y > 0$, važi nejednakost*

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \leq x\,y. \tag{5.8}$$

U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako je $x^p = y^q$.

---

[2]I.L. Jensen (1859-1925), danski matematičar
[3]W.Young (1882-1946), engleski matematičar

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \ln x$ u oblasti $D = (0, +\infty)$. Kako je $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ za svako $x \in D$, primenom nejednakosti (5.6), uzevši da je $\alpha_1 = 1/p$, $\alpha_2 = 1/q$, $x_1 = x^p$, $x_2 = y^q$, dobija se

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q = \ln x\, y\,,$$

odakle očigledno sledi nejednakost (5.7). □

Teorema 5.5. (**[5]Helderova nejednakost**) *Neka su $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ proizvoljne n-torke pozitivnih realnih brojeva i $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ takvi da je $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Tada*
(a) *ako su p, q pozitivni, važi nejednakost*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}; \tag{5.9}$$

(b) *ako je $p \in \mathbb{R}^-$ ili $q \in \mathbb{R}^-$, važi obrnuta nejednakost tj.*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.10}$$

U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako su a^p i b^q proporcionalni.

Dokaz. (A) Označimo sa $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^p$ i $B = \sum_{k=1}^{n} b_k^q$. Nejednakost (5.9) može se zapisati u obliku

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k^p}{A}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{b_k^q}{B}\right)^{\frac{1}{q}} \leq 1$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$ u oblasti $D = (0, +\infty)$. Kako je

$$f''(x) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) x^{\frac{1}{p}-2} = -\frac{1}{p\,q}\, x^{\frac{1}{p}-2} \leq 0, \quad \text{za svako } x \in D,$$

f je konkavna funkcija u oblasti D. Zato ako primenimo Teoremu 5.3., uzevši da je $\alpha_k = \dfrac{b_k^q}{B}$ i $x_k = \dfrac{a_k^p}{b_k^q}$, dobijamo

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^q}{B} \cdot \frac{a_k^p}{b_k^q}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^q}{B}\left(\frac{a_k^p}{b_k^q}\right)^{\frac{1}{p}} \implies \frac{1}{B^{1/p}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{B}\sum_{k=1}^{n} b_k^{q-\frac{q}{p}} \cdot a_k$$

Kako je $q - \frac{q}{p} = 1$ i $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, iz prethodne nejednakosti sledi

$$B^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k\,.$$

(B) Pretpostavimo da je $p < 0$. Označimo sa $P = -p/q$, $Q = 1/q$. Tada su P, Q pozitivni realni brojevi takvi da je $\dfrac{1}{P} + \dfrac{1}{Q} = 1$. Sada možemo primeniti nejednakost (5.9) dokazanu pod (A) na n-torke

[4]O. Hölder (1859-1937), nemački matematičar

$u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ pozitivnih realnih brojeva određenih sa $u_k = a_k^{-q}$, $v_k = (a_k b_k)^q$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Dobija se

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^q = \sum_{k=1}^{n} u_k\, v_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^P\right)^{\frac{1}{P}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^Q\right)^{\frac{1}{Q}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{-\frac{q}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k\right)^{q},$$

odakle sledi nejednakost (5.10). $\square$

Teorema 5.6. **(Nejednakost [6]Minkovskog)** *Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ proizvoljne n-torke nenegativnih realnih brojeva i $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.*
(a) *Ako je $p > 1$, važi nejednakost*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}; \tag{5.11}$$

(b) *Ako je $p < 1$ i brojevi $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, važi obrnuta nejednakost tj.*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}; \tag{5.12}$$

U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako je $\dfrac{a_1}{b_1} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Dokaz. Pretpostavimo da nisu svi brojevi x_k, y_k, $1 \leq k \leq n$ jednaki nuli, jer u suprotnom nejednakost je trivijalna i neka je $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ takav da je $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Ako na oba sabirka na desnoj strani identiteta

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1}$$

primenimo Helderovu nejednakost, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Kako je $(p-1)q = p$, deljenjem prethodne nejednakosti sa $\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$, dobija se nejednakost (5.11). Tvrđenje pod (b) pokazuje se slično. $\square$

Pokazaćemo sada neke nejednakosti korišćenjem Jensenove nejedankosti.

Primer 5.1. *Dokazati da za svaka tri prirodna broja a, b, c važi nejednakost*

$$\frac{a+b+c}{3} \leq a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{a}{a+b+c}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

Rešenje: Za funkciju $f(x) = \ln x$, $x \in D = (0, \infty)$ je $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ za svako $x \in D$. Zato ako uzmemo da je

$$\alpha_1 = \frac{a}{a+b+c},\ \alpha_2 = \frac{b}{a+b+c},\ \alpha_3 = \frac{c}{a+b+c},$$

---

[5]H. Minkowski (1864-1909), nemački matematičar

primenom nejednakosti (5.6) imamo da je

$$\alpha_1 \ln a + \alpha_2 \ln b + \alpha_3 \ln c \leq \ln(\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c) \implies a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{a}{a+b+c}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c},$$

čime je pokazana desna nejednakost. Da bi pokazali levu nejednakost posmatrajmo funkciju $g(x) = x \ln x$ u oblasti D. Kako je $g''(x) = 1/x > 0$,za svako $x \in D$, funkcija g je konveksna, pa primenom nejednakosti (5.5), za $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dfrac{1}{3}$, dobija se

$$\frac{1}{3}(a \ln a + b \ln b + c \ln c) \geq \frac{a+b+c}{3} \cdot \ln \frac{a+b+c}{3} \implies a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c},$$

odakle direktno sledi leva nejednakost. $\triangle$

Napomena. Leva nejednakost je već pokazana u Primeru 2.6. primenom nejednakosti između harmonijske i geometrijske sredine.

Primer 5.2. *Neka su* $0 \leq \alpha_k \leq \dfrac{\pi}{2}$, $k = 1, 2, \cdots, n$. *Dokazati nejednakosti*

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \leq n \cdot \sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\right), \tag{5.13}$$

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n \leq \sin^n\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\right). \tag{5.14}$$

Rešenje: Kako je za $f(x) = \sin x$, $f''(x) = -\sin x < 0$ za svako $x \in (0, \pi/2)$, prva nejednakost sledi primenom Teoreme 5.3. Druga nejednakost se dobija primenom Teoreme 5.3 na funkciju $g(x) = \ln(\sin x)$ na intervalu $G = (0, \pi/2)$. Zaista, kako je $g''(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} < 0$, za svako $x \in G$, prema (5.6) dobija se

$$\ln(\sin\alpha_1) + \ln(\sin\alpha_2) + \ldots + \ln(\sin\alpha_n) \leq n \cdot \ln\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\right),$$

odakle sledi (5.14). $\triangle$

Napomena. Primetimo da za $n = 3$, tj. kada su α_k, $k = 1, 2, 3$ uglovi oštouglog trougla, iz (5.13) i (5.14) dobijamo nejednakosti

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \sin^3\frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}.$$

Druga nejednakost je već pokazana u Primeru 3.7.

Primer 5.3. *Neka su* α, β, γ *uglovi trougla i* $n \in \mathbb{N}$. *Dokazati nejednakosti*

$$\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2} \geq 3^{\frac{n+2}{2}}, \tag{5.15}$$

$$\operatorname{tg}^n\alpha + \operatorname{tg}^n\beta + \operatorname{tg}^n\gamma \geq 3^{\frac{n+2}{2}}. \tag{5.16}$$

Rešenje: Za funkciju $f(x) = \operatorname{ctg}^n x$ je

$$f''(x) = n(n-1)\operatorname{ctg}^{n-2}x \cdot \frac{1}{\sin^4 x} + 2n\operatorname{ctg}^{n-1}x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} > 0, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, funkcija f je konveksna, pa prema Teoremi 5.3 sledi

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2} &= 3\left(\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2}\right) \geq 3 \cdot \operatorname{ctg}^n\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) \\
&= 3 \cdot \operatorname{ctg}^n\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} = 3\operatorname{ctg}^n\frac{\pi}{6} = 3 \cdot (\sqrt{3})^n = 3^{\frac{n+2}{2}}.
\end{aligned}$$

Druga nejednakost se može analogno pokazati. $\triangle$

Napomena. Primetimo da je specijalan slučaj nejednakosti (5.15) za $n = 2$ pokazan u Primeru 3.8. (vidi nejednakosti (3.19)).