JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

1 Uvod

Cilj ovog predavanja je da se postojeće tehnike rešavanja jednačina i nejednačina iskoriste za rešavanje nekih problema koji, na prvi pogled, ne spadaju u gradivo osnovne škole. Pretpostavka je da učenici znaju da računaju sa brojevima. Skupove prirodnih, celih, racionalnih (razlomaka) i realnih brojeva označavaćemo redom slovima $\mathbb{N}, \mathbb{Z}.\mathbb{Q}.\mathbb{R}$. Takođe, učenici trebaju znati poredak u skupu brojeva, kao i neke osobine poretka i da znaju Dekartov koordinatni sisten u ravni i na pravoj (brojna prava).

Pođimo prvo od nekih pojmova i indentiteta (obrazaca) koji nam trebaju u daljem radu. Sve ono što se može dobiti od brojeva i nekih konstanti (koje obično označavamo slovima) primenjujući konačno mnogo puta osnovne računske operacije $\{+, \cdot, -, :\}$, uz upotrebu zagrada, nazivamo *izrazima*. Može se dozvoliti i korišćenje korena. Na primer:

$$(x+2b)(y-x^2+4(5-x)); \quad \left(\frac{1}{x+2} - x^3\right)(x^2-y^2); \quad a^3-b^3; \quad \sqrt{x-1}-x^2$$

jesu izrazi. Stroga definicija pojma izraza nije baš jednostavna. Svaka od konstanti (slovo) koja se nalazi u izrazu može biti zamenjena nekim brojem i tada se izraz može izračunati, tj. dodeljuje mu se jedan broj koji nazivamo *numerička* ili *brojna* vrednost izraza. Neke od konstanti nazivamo *parametrima* i pri njihovom konstantnom izboru, druge konstante nazivamo *promenljivim* ili *nepoznatim* veličinama. Promenljive ćemo, po dogovoru, označavati malim slovima $x, y, z, \ldots$. Ako je u izrazu veći broj nepoznatih, bolje ih je označavati jednim slovom i indeksima, kao na primer $x_1, x_2, x_3 \ldots$. Izraze možemo smatrati i *funkcijama* i prosto označavati sa $f(x) = x^2 - 2ax + b$, gde za konkretne vrednosti parametara, na pr.$a = 1$ i $b = -3$ možemo svakom broju x dodeliti (izračunati ako je to moguće) vrednost izraza $f(x) = x^2 - 2x - 3$, na pr. $f(-1) = 0$, $f(3) = 0$, $f(1) = -4$. Ako se radi o izrazu u kome imamo dve promenljive, na pr. x i y, mi ćemo taj izraz označavati sa $f(x, y)$, ili sa $g(x, y)$, ili nekim drugim slovom, pri tome vodeći računa koja je prva a koja druga promenljiva.

Jednakost ili *jednačinu* definišemo kao dva izraza, na pr. $f(x)$ i $g(x, y)$, između kojih je znak jednakosti, tj. $f(x) = g(x, y)$, ili na osnovu osobina jednakosti imamo i drugi zapis $f(x) - g(x, y) = 0$. Ako imamo jednu, dve, tri, itd. nepoznatih onda govorimo o jednačini sa jednom, dve, tri, itd. nepoznatih.

Rešavanje jednačine u nekom skupu brojeva, na pr. sa jednom nepoznatom x u skupu $\mathbb{Z}$, je nalaženje svih brojeva koje iz $\mathbb{Z}$ može da uzme nepoznata x tako da se njenom zamenom u datoj jednačini dobija numerički indentitet. Ovo se postiže prelazeći sa jednačine na njoj *ekvivalentnu jednačinu* (imaju ista rešenja) *dopustivim transformacijama* u koje spadaju:

1. dodavanje istog broja (ili indentičnih izraza) i levoj i desnoj strani jednačine.

2. množenje obe strane jednačine brojem različitim od nule.

3. primenom zakona koji važe u skupu brojeva (komutativni, asocijativni, distributivni zakoni).

4. zamena izraza njemu identičnim izrazom (numerički jednakim), na primer: $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ (razlika kvadrata); $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^3 \mp ab + b^2)$ (zbir i razlika kubova); $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (kvadrat zbira (razlike)); $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^b + 3ab^2 \pm b^3)$ (kub zbira (razlike)), itd.

Primer 1 *Rešiti jednačine:* $x^2 = 1$*;* $x^2 - 2x + 3 = 0$*.*

Jednačina $x^2 = 1$ ima u skupu $\mathbb{N}$ samo jedno rešenje $x = 1$, dok u ostlim skupovima $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ ima dva rešenja $x = \pm 1$. Jednačina $x^2 - 2x + 3 = 0$ nema rešenja u skupu $\mathbb{R}$. Zaista, jednačina je ekvivalentna sa jednačinom $(x-1)^2 + 3 = 0$ i kako je $(x-1)^2 \geq 0$ za svaki realan broj, to je za svako $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 + 3 \geq 3 > 0$, pa ni jedan broj x nije rešenje polazne jednačine. $\triangle$

2 Jednačine. Nalaženje nula polinoma

Izraz $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gde su $a_n \neq 0, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$, realne konstante, nazivamo *polinom stepena* $n \in \mathbb{N}$. Treba rešiti jednačinu $P(x) = 0$.

Nalaženje nula datog polinoma stepena $n = 1$, tj. rešavanje jedna $ax + b = 0$ je neposredno. Za slučaj $n = 2$, postoji obrazac kojim se nalaze rešenja, ali to nije u programu osnovne škole. Jednačina oblika $ax^2 + b = 0$, $a \neq 0$, takođe se neposredno rešava diskusijom parametara a i b. Međutim, metodom *dopune do potpunog kvadrata* može se rešiti *kvadratna jednačina*

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Ako se primeni jednakost

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

gornja jednačina je ekvivalentna jednačini

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Za razne vrednosti parametara a, b, c dobijamo dva, jedno ili nijedno rešenje za $x + \frac{b}{2a}$, a time i rešenje za x.

Primer 2 *Rešiti jednačine:* $x^2 - 3x + 2 = 0$; $4x^2 - 20x + 25 = 0$; $x^2 - 5x + 7 = 0$.

Rešimo prvu jednačinu. Primenom gornjeg obrasca, za $a = 1$, $b = -3$ i $c = 2$ dobijamo jednačinu

$$(x + 3/2)^2 = 1/4, \quad \textit{odnosno} \quad x + 3/2 = \pm 1/2, \quad \textit{tj.} \quad x = 1 \quad \textit{ili} \quad x = 2.$$

Napomena. Za učenike je možda lakše da ne koriste gornji obrazac (da ga ne pamte) nego da gornji postupak urade na konkretnom primeru.

Za slučaj $n = 3$ i $n = 4$ postoje postupci kojima se svaka takva jednačina može rešiti. Za $n \geq 5$ jednačina se u opštem slučaju ne može rešiti. Takve jednačine možemo rešiti ako uspemo da levu stranu jednačine rastavimo na činioce i onda tražimo nule svakog činioca.

Primer 3 *Rastavljanjem na činioce rešiti sledeće jednačine:* $2x^2 - 3x - 2 = 0$, $2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.

Rešimo drugu jednačinu. Kako je $2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 2x^2 - 2x + x^2 - 1 = 2x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(2x + 1)$, to su rešenja jednačine $x = \pm 1$ i $x = -1/2$. △

Ako treba rešavati jednačinu u kojoj se pojavljuje i neki koren, na pr. kvadratni koren, potrebno nam je da rešimo neke nejednačine oblika $f(x) > 0$

ili $f(x) \geq 0$, gde je $f(x)$ podkorena veličina jer je izraz $\sqrt{f(x)}$ definisan, tj. može se izračunati njegova vrednost za one brojeve x za koje je $f(x) \geq 0$.

Ovakve jednačine (iracionalne) rešavaju se tako da dođemo do njoj ekvivalentne jednačine koja u sebi nema korena. To se može postići kvadriranjem. Međutim tu treba biti oprezan jer

$$a = b \quad \text{nije ekvivalentno sa} \quad a^2 = b^2.$$

Iz $a = b$ sledi da je i $a^2 = b^2$, ali obratno ne važi ($2^2 = 2^2$, ali je $2 \neq -2$)

Nekada je lakše vršiti kvadriranje ne vodeći računa o ekvivalentnosti, a rešenja poslednje jednačine proveriti u polaznoj jednačini.

Primer 4 *Rešiti jednačine:* $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+3} = 0$; $\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7$; $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4$; $x + \sqrt{4+x^2} = 8$.

Rešimo treću jednačinu. Smenom $t = \frac{3-x}{2+x}$ dobijamo jednačinu $\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}} = 4$, pa kvadriranjem je $t^2 - 10t + 9 = 0$ tj. $t = 9$ ili $t = 1$. Zamenom u smenu dobijamo $x = 5$ ili $x = -2$. Zamenom u polaznu jednačinu vidimo da su oba ta broja rešenje. (Ovde smo koristili metod implikacija, ne vodeći račun o uslovima. Jasno, navodeći uslove zadatak bi bio "korektnije rešen", ali nekada ispisivanje tih uslova "komplikuje" rešavanje). $\triangle$

Jednačine u kojima se pojavljuje apsolutna vrednost rešavaju se pretražujući brojnu pravu, tj. tražimo rešenja na intervalima na kojima se jednačina svodi na jednačinu bez apsolutnih vrednosti.

Primer 5 *Rešiti jednačine:* $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 1$; $||x-1| - 2| = 1$; $x + |x| = x/|x|$; $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 + 24}} = x + 1$.

Rešimo drugu jednačinu. Kako $x - 1$ menja znak u $x = 1$ tražimo rešenje $x \geq 1$ i $x < 1$. Za $x < 1$ imamo $|-(x-1) - 2| = 1$, odnosno $|x+1| = 1$, tj. $x = 0$, $x = -2$ (oba rešenja manja su od 1). Za $x \geq 1$ jednačina postaje $|x - 3| = 1$, tj. $x = 4$ i $x = 2$ (oba su veća ili jednaka 1). $\triangle$

Ovakvi zadaci lako se rešavaju grafički.

Nekada je moguće da jednačina sa više nepoznatih ima samo jedno rešenje, kao u sledećem primeru

Primer 6 *Naći x, y, z tako da važi* $16x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 8x + 6y + 4z - 3$.

Lako se vidi da je gornja jednačina ekvivalentna jednačini $(4x-1)^2 + (3y-1)^2 + ((2z+1)^2 = 0$, pa imamo jedino rešenje $x = 1/4$, $y = 1/3$ i $z = -1/2$. $\triangle$

3 Sistemi jednačina

Ako imamo više jednačina (bar dve) sa jednom ili više nepoznatih onda govorimo da je dat *sistem jednačina*. Rešenje sistema jednačina sa n nepoznatih je uređena n-torka konstanti (prvi element odgovara prvoj nepoznatoj, drugi drugoj i tako redom) tako da zamenom u svaku jednačinu dolazimo do indentiteta.

Rešavanje sistema jednačina je, ustvari, postupak kojim se primenom dopustivih transformacija prelazi sa sistema na njemu ekvivalentan sistem, dok se na kraju ne dođe do sistema iz koga se neposredno dobija rešenje (ako postoji). Dopustive transformacije, osim onih koje smo pomenuli kod rešavanja jedne jednačine, mogu biti i promena redosleda jednačina, množenje jedne jednačine brojem i dodavanje drugoj jednačini, uvođenje smena, tj. prelaz na druge nepoznate, itd. Teško je potpuno opisati sve postupke pri rešavanju sistema, samo je bitno voditi računa da se sa sistema prelazi na ekvivalentan sistem (imaju ista rešenja).

Primer 7 *Rešiti sledeće sisteme:*
a) $x^2+y^2=2x+2y-1, \quad y^2+z^2=2y+2z+3, \quad z^2+x^2=2z+2x+2;$
b) $(x^2+1)(y^2+1)=5xy, \quad x^2y+2xy^2+2x+y=7xy.$

Rešenje za b). Ako su brojevi x, y, rešenje sistema i ako je bar jedan od x, y jednak nuli dobija se kontradikcija, tj. da je broj, veći ili jednak jedan, jednak nuli. Zato je $xy \neq 0$ pa deobom obe strane gornjih jedna čina sa xy dobijamo ekvivalentan sistem

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=5, \quad x+\frac{1}{x}+2\left(y+\frac{1}{y}\right)=7$$

Smenom $a=x+\frac{1}{x}$ i $b=y+\frac{1}{y}$ dobijamo sistem $ab=5$, $a+2b=7$, i eliminacijom a do jednačine $2b^2-7b+5=0$. Rešavanje ove jednačine daje $b=1$ ili $b=5/2$ i vraćanjem u smene dolazimo do sledećeg skupa rešenja $R=\{(1,2),(1,1/2)\}$. $\triangle$

Ako je sistem sa dve nepoznate sastoji od jedne linearne i jedne kvadratne jednačine, tada se smenom može doći do jednačine u kojoj imamo samo jednu nepoznatu. Ako su obe jednačine kvadratne, bez linearnih članova, tada se može doći do jednačine oblika $ax^2+bxy+cy^2=0$ i smenom $t=y/x$, $x\neq 0$ do kvadratne jednačine po t.

Primer 8 *Rešiti sledeće sisteme:*
1. $2x - y + 1 = 0, \quad 2x^2 + 2x - y - 1 = 0;$
2. $x^2 + 3xy - 18 = 0, \quad 3y^2 + xy - 6 = 0;$
3. $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 10 = 0;$
4. $x^2 + 3xy + 4y^2 = 2, \quad 3x^2 - xy - 5y^2 = 5.$

3.1 Sistem linearnih jednačina

Linearna jednačina od $n \in \mathbb{N}$ nepoznatih je oblika

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nepoznate, a $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ konstante.

U osnovnoj školi rešava se sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate. Pri tome se koristi neka od metoda: smene, suprotnih koeficijenata, grafička itd. Sada ćemo iskoristiti Gausov postupak (metoda suprotnih koeficijenata) da bi došli do rešenja. Prednost ovog postupka je što se može uspešno primeniti na bilo koji broj jednačina sa bilo kojim brojem nepoznatih (ne mora biti isti kao broj jednačina). Pre svega, svaku jednačinu treba urediti po nekom dogovorenom redu nepoznatih (x, y, z ili $x_1, x_2, \ldots$). Ako se to tako uradi onda se sistemu može obostrano jednoznačno pridružiti "tabelu" brojeva (njegovih koeficijenata). Na primer, sistemu

$$\begin{aligned} 2y + 3z &= -1 \\ -x + y - 3z &= 4 \\ 10x + z &= 1 \end{aligned}$$

pridružimo tabelu

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 0 & 2 & 3 & | & -1 \\ -1 & 1 & -3 & | & 4 \\ 10 & 0 & 1 & | & 1 \end{array}\right]$$

Dalje je lakše "raditi sa tabelama" prelazeći sa jedne na drugu pomoću dopustivih transformacija

1. zamena mesta redovima
2. množenje nekog reda brojem različitim od nule
3. množenje jednog reda brojem i dodavanjem nekom drugom redu,

uz napomenu da gornje operacije sa redovima su operacije sa svakim odgovarajućim elementom u redu. Ove transformacije su upravo one koje dovode do ekvivalentnih sistema.

Cilj je doći do tabele koja ispod glavne dijagonale ima sve nule. U prvoj koloni mora bar jedan koeficijent biti različit od nule (u protivnom, prve nepoznate nema u sistemu). Premeštanjem redova može se dobiti da prvi broj u prvoj koloni nije nula. Sada se, pomoću tog broja, može dobiti tabela koja, osim prvog elementa, ima sve nule u prvoj koloni. Sada se postupak ponovi na redove osim prvog. Nekada, možemo imati sve nule u drugoj koloni, osim prvog elementa. Tada se izvrši "prenumeracija" nepoznatih i dalje se nastavi postupak. Pri tome, ako se dođe do reda u kome su sve nule, onda se taj red izostavi (njemu odgovara jednačina u kojoj su svi koeficijenti i slobodan član jednaki nuli, a tu jednačinu zadovoljavaju bilo koje nepoznate). Ako se ovim postupkom dođe do reda kod koga su svi elementi jednaki nuli, osim poslednjeg koji nije nula, tada naš sistem nema rešenja. Ako to nije slučaj, na kraju dolazimo do tabele brojeva, koja ima po "dijagonali" brojeve različite od nule, a ispod dijagonale sve nule. Ako se sada toj tabeli pridruži sistem, koji je ekvivalentan polaznom, dolazimo do rešenja (jedog, ili beskonačno mnogo zavisno od toga dali se u poslednjoj jednačini nalazi samo jedna ili više nepoznatih).

Uradimo ovu priču na konkretnom primeru.

Primer 9 *Rešiti sistem*

$$\begin{aligned} y - 3z &= 2 \\ 2x - 2y + 3z &= 0 \\ x - 2y + z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

Ako se ovom sistemu pridruži tabela njegovih koeficijenata i primene dozvoljene transformacije, dolazimo do sledećeg niza ekvivalentnih tabela:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sada, ovoj tabeli pridružujemo sistem, koji je ekvivalentan polaznom,

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 2y + z &= -2 \\ 7z &= -6 \end{aligned}$$

i dobijamo rešenje $z = -6/7, \quad y = -8/7, \quad x = -3/7$.

4 Nejednačine

Nejednačina se dobija kada se "između" dva izraza stavi neki od znakova uređenja $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, kao na primer $\sqrt{x-1} \leq x$. Kao i jednačine, i nejednačine se rešavaju prelazeći na ekvivalentne, dopustivim transformacijama, kao što su:

1. ako se obema stranama nejednačine doda isti broj (ili indentički jednaki izrazi) dobijamo ekvivalentnu nejednačinu

2. ako se nejednačina pomnoži istim brojem (ili izrazom čiji je znak konstantan) nejednačina ne menja znak ako je taj broj pozitivan, a menja znak ako je taj broj negativan.

3. nejednačina se ne menja ako se naki izraz zameni njemu indentičkim izrazom. Kvadratne nejednačine (kao i druge) možemo rešavati rastavljenjem

na činioce, na pr.

Primer 10 *Rešiti nejednačinu* $-2x^2 + 3x - 1 > 0$.

Kako je $-2x^2 + 3x - 1 = -2x^2 + 2x + x - 1 = -2x(x-1) + (x-1) = (x-1)(1-2x)$, pa dobijamo nejednačinu $(x-1)(2x-1) < 0$ tj. $x-1$ i $2x-1$ jesu različitog znaka. Razmatranjem dva slučaja nalazimo rešenje $x < 1/2$ ili je $x > 1$. $\triangle$

Ako se u nejednačini javlja koren, tada se mogu koristiti sledeće ekvivalencije (čiji je dokaz neposredan).

Teorema 4.1 *Važe sledeće ekvivalencije:*

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \quad \Longleftrightarrow 0 \le f(x) \le (g(x))^2, \quad g(x) \le 0$$

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad (f(x) \ge 0,\ g(x) \le 0) \ \textit{ili}\ f(x) \ge (g(x))^2,\ g(x) \ge 0$$

Primer 11 *Rešiti nejednačine:* $\sqrt{1-4x^2} \ge 1-3x$; $(1-\sqrt{8x-3})/(4x) \ge 1$; $\sqrt{x^2-55x+250} < x-14$.

Rešimo prvu nejednačinu. Da bi jednačina bila definisana treba da je $1-4x^2 \ge 0$, tj. $-1/2 \le x \le 1/2$. Ako je $1-3x \le 0$, odnosno, $x \ge 1/3$, tada su svi brojevi $x \in [1/3, 1/2]$ rešenja nejednačine. Ako je $x \in [-1/2, 1/3)$, tada su obe strane nejednačine nenegativne, pa kvadriranjem dobijamo ekvivalentnu nejednačinu $13x^2 - 6x \le 0$, čije je rešenje $x \in [0, 6/13]$. Na kraju, rešenja nejednačine su svi brojevi iz intervala $[0, 1/2]$. $\triangle$

5 Primene nejednačina

Linearne nejednačine sa dve promenljive, na pr. $x-2y+3 > 0$, imaju rešenje koje je neki skup tačaka u ravni. Skup tačka $M(x,y)$ u ravni čije koordinate zadovoljavaju jednačinu $ax+by+c=0$, $a^2+b^2+c^2 \ne 0$ (na dalje ovaj uslov uvek važi), pripadaju jednoj pravoj p, i obratno, za svaku tačku $M(x,y) \in p$ važi $ax+by+c=0$.

U geometriji postoji pojam da su *tačke A i B sa iste strane prave p.* Sada ćemo taj pojam da uvedemo analitički.

Definicija 1 *Neka su $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$ dve različite tačke u ravni (Sl.1). Duž određenu tačkama A i B, u oznaci $[A,B]$ definišemo kao skup tačaka* $[A,B] = \{M(x,y) \,|\, x = x_1+t(x_2-x_1), y = y_1+t(y_2-y_1),\ \textit{za svako}\ t \in [0,1]\}$

Definicija 2 *Tačke A i B jesu sa iste strane prave p ako je $[A,B] \cap p = \emptyset$ (Sl.1).*

Neka je $f(x,y) = ax+by+c$ i neka je $M(x,y) \in [A,B]$. Izračunajmo

$$f(M) = f(x,y) = a(x_1+t(x_2-x_1))+b(y_1+t(y_2-y_1))+c = (1-t)f(A)+tf(B),$$

tj. važi

$$f(M) = (1-t)f(A) + tf(B), \quad \text{za svaku tačku } M \in [A, B]$$

Na osnovu ovoga neposredno dokazujemo sledeću teoremu.

Teorema 5.1 *Tačke A i B jesu sa iste strane prave p ako i samo ako je $f(A)f(B) > 0$.*

Sada možemo rešiti ovakav zadatak.

Primer 12 *Naći potrebne i dovoljne uslove da tačka $M(x, y)$ bude unutrašnja tačka trougla čija su temena $A(1, -2)$, $B(7, 4)$ i $C(-1, 3)$ (videti Sl.2).*

Jednačine pravih BC, AC i AB, redom su $x - 8y + 25 = 0$, $5x + 2y - 1 = 0$ i $x - y - 3 = 0$. Ako leve strane ovih jednačina označimo redom sa $f(x, y)$, $g(x, y)$ i $h(x, y)$, tada je potreban i dovoljan uslov da tačka M bude u trouglu da važe sledeće nejednakosti

$$f(A)f(M) > 0, \quad g(B)g(M) > 0, \quad h(C)h(M) > 0.$$

Lako je izračunati $f(A) = 42 > 0$, $g(B) = 42 > 0$ i $h(C) = -7 < 0$. Sada imamo kriterijum: Tačka $M(x, y)$ je u trouglu ako i samo ako je $f(M) > 0$, $g(M) > 0$ i $h(M) < 0$. Proverom dobijamo da je tačka $M(3, 1)$ u trouglu, a tačka $N(5, 1)$ nije u trouglu. $\triangle$

Na osnovu prethodnog vidimo da prava p deli ravan na tri disjunktna skupa tačaka: dve poluravni (jednu , gde je $f(M) > 0$; drugu, gde je $f(M) < 0$ i samu pravu p gde je $f(M) = 0$.) Ovo se može dobiti kao posledica Žordanove teoreme (svaka zatvorena Žordanova kriva u ravni deli rava na tri disjunktna skupa tačaka: "unutrašnjost" (ograničenu oblast), "spoljašnost" (neograničenu oblast) i samu krivu.)

Sledeći problem, koji se često javlja u životu, jeste optimizacija (nalaženje najmanje ili najveće vrednosti) funkcije cilja $f(x, y)$ pri datim ograničenjima (nejednakostima) za promenljive x i y.

Primer 13 *Jedna firma proizvodi stolove i stolice. Prodajna cena, kao i troškovi proizvodnje, po jedinici proizvoda, dati su u sledećoj tabeli*

	sto	*stolica*
prodajna cena	*20*	*18*
troškovi proizvodnje	*17*	*14*

Da bi se napravio gotov proizvod potrebno je uraditi sklapanje, bojenje i pakovanje. Potrebno vreme (u satima po jedinici proizvoda) za te operacije dato je tabelom

	sto	*stolica*
sklapanje	*1.5*	*1*
bojenje	*3*	*3*
sklapanje	*1*	*2*

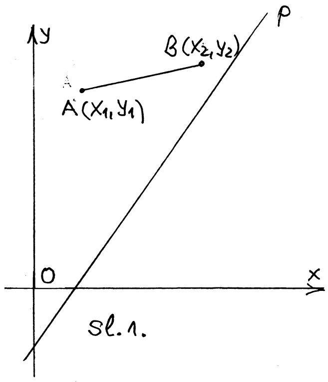
Raspoloživo vreme za sklapanje, bojenje i pakovanje je redom najviše 14, 30 i 16 sati. Odrediti optimalnu proizvodnju, tj. koliko stolova a koliko stolica treba proizvesti pa da se ostvari najveća dobit?

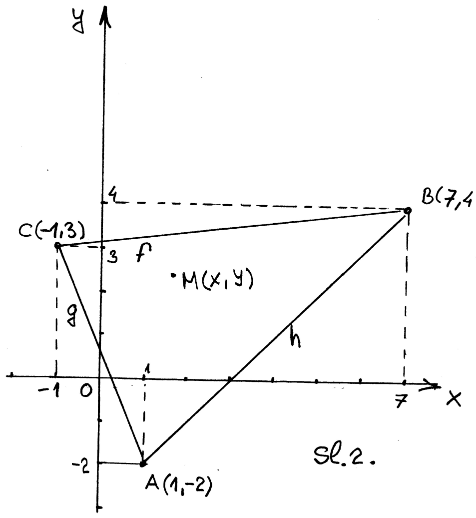
Rešenje. Ako sa x označimo broj proizvedenih stolova, a sa y broj proizvedenih stolica u nekom realnom vremenu, tada je dobit $f(x, y) = (20 - 17)x + (18 - 14)y = 3x + 4y$. Treba naći maksimum ove funkcije pri datim ograničenjima, koja se mogu opisati kao skup rešenja sistema nejednačina

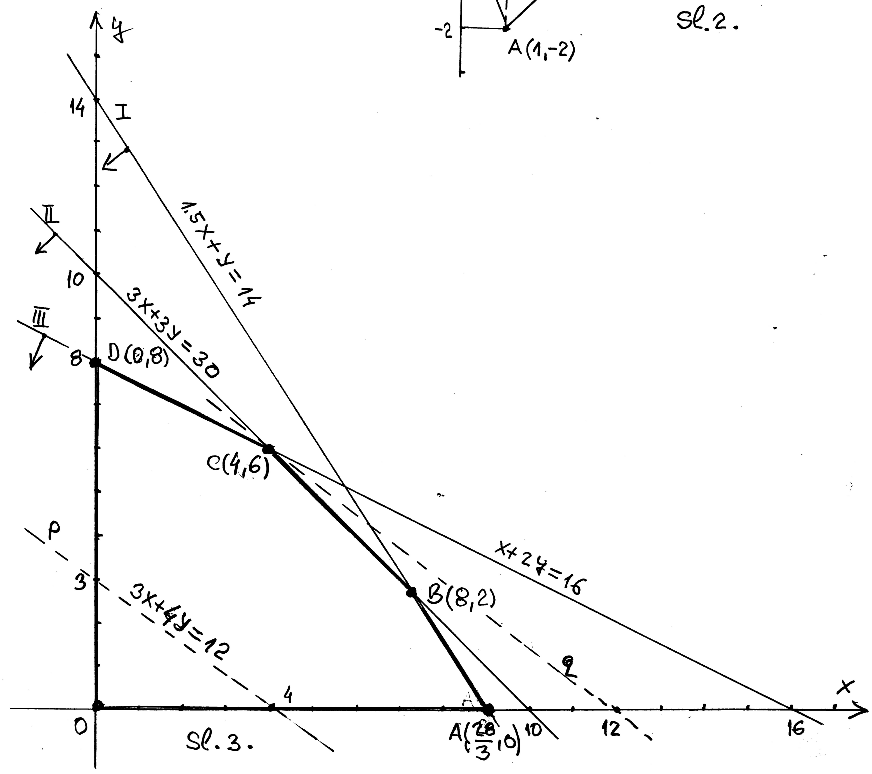
$$1.5x + y \leq 14;\ 3x + 3y \leq 30;\ x + 2y \leq 16;\ x, y \geq 0 \text{ (po tome šta su } x, y),$$

što u ravni definiše dopustivu oblast. Na Sl.3 to je oblast u petouglu OABCDO. Za neku konstantu c, na pr. $c = 12$ sve tačke $M(x, y)$ u ravni za koje je funkcija dobiti $f(x, y) = 3x + 4y = 12$ pripadaju pravoj $p : 3x + 4y = 12$ (nacrtana isprekidanom linijom). Sada se vidi da na pravoj kroz A, koja je paralelna pravoj p, funkcija $f(x, y)$ ima najveću vrednost, tj. dobit je maksimalna ako je $x = 4$ i $y = 6$ i ona iznosi 36 novčanih jedinica.

Ako postoji optimalno rešenje ono se postiže u nekoj ekstremalnoj tački O, A, B, C, D (tačke u preseku granica poluravn). Ako se izračuna dobit u tim tačkama videćemo da se u tački $C(4, 6)$ postiže maksimum.


y
p
B(x2,y2)
A(x1,y1)
O
x
Sl.1.


y
4
B(7,4)
C(-1,3)
3
f
M(x,y)
g
h
-1
0
1
7
x
-2
A(1,-2)
Sl.2.


y
14
I
1.5x+y=14
II
10
3x+3y=30
III
8
D(0,8)
C(4,6)
x+2y=16
p
3
3x+4y=12
B(8,2)
q
x
0
4
A(28/3,0)
10
12
16
Sl.3.