GEOMETRIJSKE NEJDNAKOSTI

dr Jelena Manojlović
Prirodno-matematički fakultet, Niš

1. Uvod

Prvi pojam o aritmetičkoj sredini dva pozitivna broja potiče verovatno još od Pitagorejaca. Pretpostavlja se da su oni najverovatnije znali i za dobro poznatu nejednakost između aritmetičke i geometriske sredine dva pozitivna broja

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad a, b > 0, \tag{1}$$

ali se pouzdano zna da je ovu nejednakost dokazao Euklid. Ona se pokazuje elementarno, korišćenjem svojstva da za proizvoljna dva pozitivna broja važi

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Naime, kvadriranjem leve strane prethodne nejednakosti dobija se,

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$$

odakle, očigledno sledi (1). Nejednakost se često koristi i u sledećem ekvivalentnom obliku

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \quad a, b > 0. \tag{2}$$

Ako levoj i desnoj strani nejednakosti $2\,a\,b \leq a^2 + b^2$ dodamo $a^2 + b^2$, dobijamo takođe često korišćenu nejednakost

$$(a+b)^2 \leq 2\,a^2 + 2\,b^2, \quad a, b > 0. \tag{3}$$

Kako se u mnogim matematičkim problemima javljaju nejednakosti sa više od dva različita broja, postavio se problem uopštenja nejednakosti (1). U tu svrhu uvodi se pojam aritmetičke i geometriske sredine za n pozitivnih brojeva. Sem toga, uvode se još dva pojma brojnih sredina, odnosno pojmovi kvadratne i harmonijske sredine za n pozitivnih brojeva.

Definicija 1.1. Neka je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je **harmonijska sredina** $H_n(a)$ brojeva $a_1, a_2 \ldots, a_n$ definisana izrazom

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}};$$

njihova **geometriska sredina** $G_n(a)$ je definisana sa

$$G_n(a) = (a_1\,a_2\,\ldots\,a_n)^{\frac{1}{n}};$$

njihova **aritmetička sredina** $A_n(a)$ je definisana sa

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n};$$

i njihova **kvadratna sredina** $KH_n(a)$ je definisana sa

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

2. Nejednakosti između brojnih sredina

Teorema 2.1. (Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$A_n(a) \geq G_n(a) \tag{4}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Dokazaćemo teoremu matematičkom indukcijom. Za $n = 2$ nejednakost (4) postaje (1), tj.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1\, a_2}\,.$$

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n = k - 1 \geq 2$, tj. da važi

$$A_{k-1}(a) \geq G_{k-1}(a) \tag{5}$$

i pokažimo da važi i za $n = k$. Možemo pretpostaviti, bez gubitka opštosti, da je $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$. Tada je

$$a_1 = \frac{\overbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}^{k}}{k} \leq A_k(a) \leq \frac{\overbrace{a_k + a_k + \ldots + a_k}^{k}}{k} = a_k\,. \tag{6}$$

Primetimo da je iz (6) $a_k - A_k(a) \geq 0$, tj. $a_1 + a_k - A_k(a) \geq a_1 > 0$.

Posmatrajmo $k-1$ pozitivnih brojeva $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_1 + a_k - A_k(a)$, za koje možemo primeniti indukcijsku pretpostavku (5), odnosno važi

$$\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_1 + a_k - A_k(a)}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\,(a_1 + a_k - A_k(a))}\,.$$

Kako je $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = k\, A_k(a)$, prethodna nejednakost postaje

$$\frac{k\, A_k(a) - A_k(a)}{k-1} = A_k(a) \geq \sqrt[k-1]{a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\,(a_1 + a_k - A_k(a))}\,.$$

Odavde sledi, da je

$$\begin{aligned} A_k^{k-1}(a) &\geq a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\,(a_1 + a_k - A_k(a)), \quad \text{tj.} \\ A_k^{k}(a) &\geq A_k(a)\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\,(a_1 + a_k - A_k(a)). \end{aligned} \tag{7}$$

Pokažimo sada da je

$$A_k(a)\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\,(a_1 + a_k - A_k(a)) \geq a_1\, a_2\, \ldots\, a_{k-1}\, a_k = G_k^k(a)\,. \tag{8}$$

Ako prethodnu nejednakost podelimo sa $a_2\, a_3 \ldots a_{k-1} > 0$, dobijamo ekvivalentnu nejednakost

$$\begin{aligned} A_k(a)\,(a_1 + a_k - A_k(a)) \geq a_1\, a_k \quad &\Longleftrightarrow \quad A_k(a)\, a_1 - a_1\, a_k + A_k(a)\,(a_k - A_k(a)) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -a_1(a_k - A_k(a)) + A_k(a)\,(a_k - A_k(a)) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (A_k(a) - a_1)\,(a_k - A_k(a)) \geq 0\,. \end{aligned}$$

Na osnovu (6) su $A_k(a) - a_1$ i $a_k - A_k(a)$ pozitivni brojevi, pa je i njihov proizvod pozitivan broj. Dakle, pethodna nejednakost je tačna, odnosno važi (8). Sada, iz (7) i (8) sledi da je $A_k^k(a) \geq G_k^k(a)$, tj. $A_k(a) \geq G_k(a)$.

Dokažimo da jednakost u (4) važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, očigledno imamo jednakost u (4). S druge strane, pretpostavimo da su bar dva broja iz niza brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različita međusobom, na primer $a_1 \neq a_2$. Tada je

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 \ldots + a_n}{n} \\ &\geq \left(\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 a_3 \ldots a_n \right)^{\frac{1}{n}} \\ &> (a_1\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_n)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

jer je

$$\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1\, a_2} \quad \text{za } a_1 \neq a_2.$$

Ovim je dokaz završen. □

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine označavaćemo kratko kao (GA) nejednakost.

Teorema 2.2. (Nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$G_n(a) \geq H_n(a) \tag{9}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Nejednakost (GA) za brojeve $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ glasi

$$\left(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}. \tag{10}$$

Ovde, prema Teoremi 2.1. jednakost važi ako i samo ako je $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \ldots = \frac{1}{a_n}$, tj. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Iz (10) sledi

$$G_n(a) = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \ldots + \frac{1}{a_n}} = H_n(a),$$

tj. nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine. □

Teorema 2.3. (Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$K_n(a) \geq A_n(a) \tag{11}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Ako se u identitetu

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = {} & a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \\ & + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \ldots + a_2 a_n + \ldots + a_{n-1} a_n), \end{aligned}$$

na desnoj strani jednakosti iskoristi nejednakost (2) za $a_i,\ a_k,\ 1 \leq i,\ k \leq n$, tj. da je $2a_i a_k \leq a_i^2 + a_k^2$, dobijamo nejednakost

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2). \tag{12}$$

Kako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni, iz (12) sledi da je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \sqrt{n}\,\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2},$$

tj.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Ostaje još da se pokaže da jednakost u (11) važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, očigledno imamo jednakost u (11). S druge strane, ako pretpostavimo da su bar dva broja iz niza brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različita međusobom, na primer $a_1 \neq a_2$, imamo da je

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} \\ \leq \sqrt{\frac{2\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}} &< \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}}, \end{aligned}$$

jer je korišćenjem (3)

$$\frac{(a_1 + a_2)^2}{2} < a_1^2 + a_2^2 \quad \text{za } a_1 \neq a_2.$$

Ovim je dokaz završen. $\square$

Nejednakosti (9) i (11) nazivamo kraće (HG) nejednakost i (AK) nejednakost respektivno.

Teoreme 2.1., 2.2. i 2.3. konačno daju da je

$$\boxed{H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a)}$$

Pokazane nejednakosti imaju veoma važnu ulogu i nalaze veoma široku primenu u svim oblastima matematike. Ovde ćemo primeniti ove nejednakosti na pokazivanje nekih nejednakosti između elemenata trougla, kao i na neke stereometrijske nejednakosti.

3. Nejednakosti za elemente trougla

Neka su a, b, c stranice trougla ABC, α, β, γ njima odgovarajući uglovi trougla, h_a, h_b, h_c njima odgovarajuće visine, r i R, redom, poluprečnici upisane i opisane kružnice za dati trougao i s poluobim trougla. Dokazaćemo neke interesantne nejednakosti koje važe između ovih elemenata proizvoljnog trougla.

Primer 3.1. *Dokazati da važi nejednakost:*

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq 2\sqrt{3}\,r\,R\,.$$

Rešenje: Polazimo od (AK) nejednakosti za stranice datog trougla

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3} \implies \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}\,s,$$

odakle je

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2\,s} \implies \frac{a\,b\,c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2\,s}\,a\,b\,c.$$

Znajući da je

$$P = r\,s = \frac{a\,b\,c}{4R}, \quad \text{tj.} \quad a\,b\,c = 4\,R\,P = 4\,R\;r\,s$$

gde je P površina trougla, iz prethodne nejednakosti sledi da je

$$\frac{a\,b\,c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \le \frac{\sqrt{3}}{2\,s}\,4\,R\;r\,s = 2\sqrt{3}\,r\,R.$$

Primer 3.2. *Dokazati da važi nejednakost:*

$$a\,\sin\alpha + b\,\sin\beta + c\,\sin\gamma \ge 9r\,.$$

Rešenje: Iz formula za površinu trougla:

$$P = \frac{r}{2}\,(a+b+c) = \frac{ab}{2}\,\sin\gamma = \frac{bc}{2}\,\sin\alpha = \frac{ac}{2}\,\sin\beta$$

zaključujemo da je

$$\begin{aligned} a\,\sin\alpha + b\,\sin\beta + c\,\sin\gamma &= a\cdot\frac{2P}{bc} + b\cdot\frac{2P}{ac} + c\cdot\frac{2P}{ab} \\ &= 2P\,\frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = r\,(a+b+c)\,\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ostaje još da upotrebimo dva puta nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine

$$a+b+c \ge 3\,\sqrt[3]{a\,b\,c}, \quad a^2+b^2+c^2 \ge 3\,\sqrt[3]{a^2\,b^2\,c^2}.$$

Množenjem prethodnih nejednakosti, imamo da je

$$(a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2) \ge 9\,\sqrt[3]{a^3\,b^3\,c^3} = 9\,a\,b\,c\,.$$

Sada, (13) povlači

$$a\,\sin\alpha + b\,\sin\beta + c\,\sin\gamma \ge 9\,r.$$

Primer 3.3. *Dokazati da važe nejednakosti:*

$$P \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}\,, \qquad s \ge 3\sqrt{3}\,r\,.$$

Rešenje: Iz Heronovog obrazca za površinu trougla $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, imamo da je

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s}. \tag{14}$$

S druge strane, primenom (GA) nejednakosti za pozitivne brojeve $s-a, s-b, s-c$, dobija se

$$(s-a)(s-b)(s-c) \le \left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{3s-(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{3s-2s}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27}\,.$$

Dakle, prema (14) sada sledi da je $P^2 \le \dfrac{s^4}{27}$, tj. $P \le \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$. Kako je $P = r\,s$, iz prethodne nejednakosti dobija sa $s \ge 3\sqrt{3}\,r$.

Primer 3.4. *Dokazati da važi nejednakost:*

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq 2\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big).$$

Rešenje: Iz nejednakosti harmonijske i aritmetičke sredine za dva pozitivna broja

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\leq\frac{x+y}{2},\quad x,\ y>0\,,$$

sledi da važi nejednakost

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y},\quad x,\ y>0\,.$$

Primenimo ove nejednakosti za svaki od sledećih parova pozitivnih brojeva

$$\frac{1}{s-a},\frac{1}{s-b}\quad;\quad\frac{1}{s-a},\frac{1}{s-c}\quad;\quad\frac{1}{s-b},\frac{1}{s-c}\,.$$

Dobijamo sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}\quad&\geq\quad\frac{4}{s-a+s-b}=\frac{4}{2s-(a+b)}=\frac{4}{a+b+c-(a+b)}=\frac{4}{c}\,,\\ \frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-c}\quad&\geq\quad\frac{4}{s-a+s-c}=\frac{4}{b}\,,\quad\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq\frac{4}{s-b+s-c}=\frac{4}{a}\,.\end{aligned}$$

Sabiranjem dobijenih nejednakosti, imamo da je

$$2\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

odakle očigledno sledi tražena nejednakost.

Primer 3.5. *Dokazati da za uglove trougla važe sledeće nejednakosti:*

$$\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{8},\tag{15}$$

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\leq\frac{1}{8},\tag{16}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3}{2}\sqrt{3},\tag{17}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\gamma\geq 3\sqrt{3}\,.\tag{18}$$

Rešenje: **(15):** Kako je

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\,c}}\quad&=\quad\sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4\,b\,c}}\\ \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{a\,c}}\quad&=\quad\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{4\,a\,c}}\\ \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{a\,b}}\quad&=\quad\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{4\,a\,b}}\end{aligned}$$

dobija se

$$\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)^2\,(b+c-a)^2\,(a+c-b)^2}{64\,a^2b^2c^2}}\,.$$

Kako su $a+b-c,\ b+c-a,\ a+c-b$ pozitivni brojevi, dobijamo

$$\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{(a+b-c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)}{8\,a\,b\,c}\,. \tag{19}$$

Ako su $a,\ b,\ c$ stranice trougla, tada je

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2}\le\sqrt{a^2}=a,\quad \sqrt{b^2-(c-a)^2}\le b,\quad \sqrt{c^2-(a-b)^2}\le c\,,$$

tj.

$$\sqrt{(a+b-c)\,(a-b+c)}\le a\,,\quad \sqrt{(b+c-a)\,(b-c+a)}\le b\,,\quad \sqrt{(c+a-b)\,(c-a+b)}\le c$$

Množenjem prethodnih nejednakosti imamo da je

$$\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(a+c-b)^2}\le a\,b\,c\,,$$

odnosno

$$(a+b-c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\le a\,b\,c\,. \tag{20}$$

Sada iz (19) i (20) sledi

$$\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}\,,$$

čime smo pokazali (15).

(16): Iz jednakosti

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2}\,,$$

i (15) sledi da je

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le 1+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}\,. \tag{21}$$

Na osnovu (GA) nejednakosti imamo da je

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\le\Big(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\Big)^3,$$

tako da iz nejednakosti (21), onda sledi da je

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\le\frac{1}{3^3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\,.$$

Dakle, važi i nejednakost (16).

(17): Kako je prema sinusnoj teoremi

$$\sin\alpha=\frac{a}{2\,R},\quad \sin\beta=\frac{b}{2\,R},\quad \sin\gamma=\frac{c}{2\,R},$$

nejednakost (17) se svodi na

$$\frac{a+b+c}{2\,R}\le\frac{3}{2}\sqrt{3}\quad\text{tj.}\quad a+b+c\le 3\sqrt{3}\,R\,. \tag{22}$$

Da bi pokazali ovu nejednakost polazimo od identiteta

$$a^2+b^2+c^2=8\,R^2+8\,R^2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma \tag{23}$$

i nejednakosti aritmetičke i kvadratne sredine

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}\le a^2+b^2+c^2,$$

i imamo da je

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \le 8\,R^2 + 8\,R^2 \cos\alpha\, \cos\beta\, \cos\gamma\,.$$

Iz prethodne nejednakosti i (16) dobija se da je

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \le 8\,R^2 + 8\,R^2 \cdot \frac{1}{8} = 9\,R^2\,. \tag{24}$$

odakle očigledno sledi da zaista važi (22).

(18): Polazeći od identiteta $\operatorname{tg}\alpha\, \operatorname{tg}\beta\, \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$, i koristeći (GA) nejednakost $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \ge 3\,\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha\, \operatorname{tg}\beta\, \operatorname{tg}\gamma}$, dobija se

$$\operatorname{tg}\alpha\, \operatorname{tg}\beta\, \operatorname{tg}\gamma \ge 3\,\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha\, \operatorname{tg}\beta\, \operatorname{tg}\gamma}, \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg}^3\alpha\, \operatorname{tg}^3\beta\, \operatorname{tg}^3\gamma \ge 27 \operatorname{tg}\alpha\, \operatorname{tg}\beta\, \operatorname{tg}\gamma,$$

odnosno,

$$\operatorname{tg}^2\alpha\, \operatorname{tg}^2\beta\, \operatorname{tg}^2\gamma \ge 27, \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg}\alpha\, \operatorname{tg}\beta\, \operatorname{tg}\gamma \ge 3\sqrt{3}\,.$$

Primer 3.6. *Dokazati da za elemente trougla važe nejednakosti*

$$6\,r\sqrt{3} \le a+b+c \le 3R\sqrt{3}\,. \tag{25}$$

Rešenje: Iz (GA) nejednakosti imamo da je

$$\sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)} \le \frac{a+b-c+b+c-a+a+c-b}{3} = \frac{a+b+c}{3}\,,$$

odnosno

$$27\,(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \le (a+b+c)^3\,.$$

Kako je $a+b-c = 2(s-c)$, $b+c-a = 2(s-a)$, $a+c-b = 2(s-b)$, prethodna nejednakost postaje

$$216\,(s-a)(s-b)(s-c) \le (a+b+c)^3 = 2s\,(a+b+c)^2\,. \tag{26}$$

Korišćenjem Heronovog obrasca i jednakosti $P = r\,s$ dobija se

$$216\,(s-a)(s-b)(s-c) = 216\,\frac{P^2}{s} = 216\,r^2\,s\,,$$

što zajedno sa (26) daje $108\,r^2 \le (a+b+c)^2$, odakle direktno sledi leva nejednakost. Desna nejednakost je pokazana u Primeru 3.5. (videti (22)).

Primer 3.7. *Prečnik kruga upisanog u trougao najviše je jednak poluprečniku kruga opisanog oko istog trougla.*
Rešenje: Na osnovu prethodnog primera je $6r\sqrt{3} \le 3R\sqrt{3}$, tj. $2r \le R$.

Primer 3.8. *Dokazati da za elemente trougla važe nejednakosti*

$$\sqrt{3}\,P \le (R+r)^2\,, \tag{27}$$

$$(a\,b\,c)^2 \ge \Big(\frac{4P}{\sqrt{3}}\Big)^3\,, \tag{28}$$

$$a\,b\,c \le (R\,\sqrt{3})^3\,. \tag{29}$$

$$4\sqrt{3}\,P \le a^2+b^2+c^2 \le 9R^2\,. \tag{30}$$

U ovim nejednakostima važi znak jednakosti ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

Rešenje: **(27):** Kako je $a+b+c \le 3\sqrt{3}\,R$ prema Primeru 3.6., imamo da je

$$R \ge \frac{2\,s}{3\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad R+r \ge \frac{s}{3\sqrt{3}} + \frac{s}{3\sqrt{3}} + r = \frac{1}{3}\Big(\frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{s}{\sqrt{3}} + 3\,r\Big)\,.$$

Primenjujući sada odnos između aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve $\frac{s}{\sqrt{3}}$, $\frac{s}{\sqrt{3}}$, $3\,r$, iz prethodne nejednakosti se dobija

$$R+r \ge \Big(\frac{s}{\sqrt{3}} \cdot \frac{s}{\sqrt{3}} \cdot 3\,r\Big)^{1/3} = (s^2 r)^{1/3} = (s\,P)^{1/3}\,. \tag{31}$$

U Primeru 3.3. smo pokazali da važi $s^2 \ge 3\sqrt{3}\,P$, tako da iz (31) sada sledi da je

$$(R+r)^2 \ge (s^2 P^2)^{1/3} \ge (3\sqrt{3}\,P^3)^{1/3} = (3^{3/2} P^3)^{1/3} = \sqrt{3}\,P\,.$$

(28): Iz nejednakosti $a+b+c \le 3\sqrt{3}\,R$, tj. $2s \le 3\sqrt{3}\,R$, korišćenjem identiteta $abc = 4RP$ dobija se

$$\frac{4P}{\sqrt{3}} = \frac{abc}{R\sqrt{3}} \le \frac{3abc}{2s} = \frac{3abc}{a+b+c}\,. \tag{32}$$

(GA) nejednakost za stranice trougla daje $\frac{a+b+c}{3} \ge (abc)^{1/3}$, tj. $\frac{3}{a+b+c} \le (abc)^{-1/3}$, što zajedno sa (32) daje

$$\frac{4P}{\sqrt{3}} \le (abc)^{2/3}$$

odakle direktno sledi nejednakost (28).
(29): Iz (GA) nejednakosti za stranice trougla i nejednakosti (25) sledi

$$3(abc)^{1/3} \le a+b+c \le 3\sqrt{3}\,R\,,$$

odakle direktno sledi nejednakost (29).
(30): Iz nejednakosti između kvadratne i geometrijske sredine za stranice trougla i nejednakosti (28) je

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge (abc)^{2/3} \ge \frac{4P}{\sqrt{3}}\,,$$

odakle se dobija leva strana nejednakosti (30), tj. $4\sqrt{3}P \le a^2+b^2+c^2$. Desna strana nejednakosti direktno sledi iz identiteta (23) i nejednakosti (16) pokazane u Primeru 3.5.

Primer 3.9. *Dokazati da važe nejednakosti:*

$$h_a h_b h_c \ge 27 r^3, \qquad h_a + h_b + h_c \ge 9r\,.$$

Rešenje: Iz obrazaca za površinu trougla:

$$P = \frac{r}{2}\,(a+b+c) = \frac{a\,h_a}{2} = \frac{b\,h_b}{2} = \frac{c\,h_c}{2}$$

dobijamo da je

$$r = \frac{2P}{a+b+c}, \quad h_a\,h_b\,h_c = \frac{2P}{a} \cdot \frac{2P}{b} \cdot \frac{2P}{c} = \frac{8\,P^3}{a\,b\,c}\,.$$

Dakle, prva nejednakost se svodi na

$$\frac{8\,P^3}{a\,b\,c} \ge 27\,\frac{8\,P^3}{(a+b+c)^3} \quad \text{tj.} \quad (a+b+c)^3 \ge 27\,a\,b\,c\,.$$

Prethodna nejednakost je tačna, na osnovu nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine za stranice trougla, odnosno, $(a+b+c)/3 \geq (a\,b\,c)^{1/3}$.

Da bi pokazali drugu nejednakost primetimo da je

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2\,P}=\frac{1}{r}\,,$$

odakle na osnovu nejednakosti harmonijske i aritmetičke sredine sledi data nejednakost

$$\frac{h_a+h_b+h_c}{3} \geq \frac{3}{\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}}=\frac{3}{\dfrac{1}{r}}=3\,r\,.$$

4. Stereometrijske nejednakosti

Primer 4.1. *Ako su a, b, c ivice, P površina, a V zapremina pravouglog paralelopipeda, onda važe nejednakosti*

$$216V^2 \leq P^3\,, \qquad P \leq \frac{2}{3}\,(a+b+c)^2\,.$$

Rešenje: Na osnovu nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve ab, bc, ca imamo

$$(ab+bc+ca)^3 \geq 27a^2b^2c^2\,,$$

odakle neposredno sleduje prva nejednakost, jer je $P=2(ab+bc+ca)$ i $V=abc$. Primetimo da jednakost važi ako i samo ako je $ab=bc=ca$, tj. $a=b=c$.

Površina pravouglog paralelopipida je

$$P=2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2\,. \tag{33}$$

Kako je zbog (AK) nejednakosti

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \quad \text{tj.} \quad a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

iz (33) sledi druga nejednakost.

Primer 4.2. *Ako su r, h, V, M redom poluprečnik osnove pravog kružnog vajka, njegova visina, zapremina i površina omotača, onda važe nejednakosti*

$$V \leq \frac{4\pi}{27}(r+h)^3\,, \qquad M \leq \frac{\pi}{2}(r+h)^2\,, \qquad 54\pi\,V^2 \leq P^3.$$

Rešenje: Aritmetička sredina brojeva $r/2$, $r/2$ i h nije manja od njihove geometrijske sredine, tj.

$$\frac{r+h}{3} \geq \left(\frac{r^2h}{4}\right)^{1/3}=\left(\frac{V}{4\pi}\right)^{1/3},$$

odakle sledi prva od navedenih nejednakosti.

Druga nejednakost sledi iz (GA) nejednakosti za brojeve r i h, tj.

$$\frac{r+h}{2} \geq \sqrt{rh}=\left(\frac{M}{2\pi}\right)^{1/2}.$$

Kako je $P = 2\pi(r^2 + rh)$ i $V = \pi\, r^2 h$, imamo

$$P = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi\, r}\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{2\pi\, r} + \frac{V}{2\pi\, r}\right). \tag{34}$$

Koristeći (GA) nejednakost dobijamo

$$\left(r^2 + \frac{V}{2\pi\, r} + \frac{V}{2\pi\, r}\right) \geq 27 r^2 \cdot \frac{V}{2\pi\, r} \cdot \frac{V}{2\pi\, r} = 27 \frac{V^2}{4\pi^2}. \tag{35}$$

Iz (34), na osnovu (35), sledi i treća nejednakost.

Zadatak 1. Dokazati da za uglove trougla važe sledeće nejednakosti:

$$1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{8}\sqrt{3},$$

$$\frac{3}{4} \leq \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} < 1, \qquad \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2} \geq 9,$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \geq 2\sqrt{3}, \qquad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geq 1,$$

Zadatak 2. Dokazati da za elemente trougla važe sledeće nejednakosti:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 8s(2R - r), \qquad \sqrt{3}(a + b + c) \geq 2(h_a + h_b + h_c),$$

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq 12P\sqrt{3} \leq 54Rr, \qquad \frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{4r^2},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{R} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}, \qquad 36r^2 \leq ab + bc + ca \leq 9R^2,$$