ELEMENTARNE FUNKCIJE

dr Jelena Manojlović
Prirodno-matematički fakultet, Niš

1. Osnovni pojmovi

Jedan od najvažnijih pojmova u matematici predstavlja pojam funkcije.

Definicija 1.1. Neka su X i Y dva neprazna skupa. Funkcija f iz skupa X u skup Y je pridruživanje (pravilo) koje svakom elementu x skupa X dodeljuje tačno jedan element y skupa Y. U tom slučaju, simbolički pišemo $f : X \to Y$ ili $X \xrightarrow{f} Y$, odnosno $y = f(x)$.

Skup X naziva se domen i označava se sa $D(f)$ ili $Dom(f)$, a skup Y kodomen funkcije f. Element $x \in X$ naziva se nezavisno promenljiva, a $y \in Y$ se naziva zavisno promenljiva.

Skup G tačaka u Dekartovom koordinatnom sisitemu sa koordinatama $\big(x, f(x)\big)$, $x \in D(f)$ naziva se grafik funkcije $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj.

$$G = \{\big(x, f(x)\big) \,|\, x \in D(f)\}\,.$$

(i) Grafik funkcije $y = f(x) + a$ može se dobiti translacijom grafika funkcije $y = f(x)$ duž y-ose za vrednost a.

(ii) Grafik funkcije $y = f(x - b)$ može se dobiti translacijom grafika funkcije $y = f(x)$ duž x-ose za vrednost b.

(iii) Grafik funkcije $y = f(-x)$ je simetričan u odnosu na y-osu sa grafikom funkcije $y = f(x)$.

(iv) Grafik funkcije $y = -f(x)$ je simetričan u odnosu na x-osu sa grafikom funkcije $y = f(x)$.

Podsetimo se najvažnijih svojstava funkcije.

Definicija 1.2. Funkcija $f : X \to Y$ naziva se:

(1) injekcija (”1-1” funkcija) ako za svako $x_1, \ x_2 \in X$ važi

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

(2) sirjekcija (funkcija ”NA”) ako i samo ako za svako $y \in Y$ postoji bar jedno $x \in X$ takvo da je $y = f(x)$, tj. ako i samo ako je

$$f(X) = \{\, f(x) \,|\, x \in X \,\} = Y;$$

(3) bijekcija ako je ona injekcija i sirjekcija.

Definicija 1.3. Funkcije $f : X_1 \to Y_1$ i $g : X_2 \to Y_2$ su jednake ako i samo ako:
(1) imaju isti domen, tj. $X_1 = X_2$;
(2) imaju isti kodomen, tj. $Y_1 = Y_2$;
(3) $f(x) = g(x)$ za svako $x \in X_1 = X_2$.

Definicija 1.4. Neka je $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. Kako je $f(X) \subset Y$, svaki element $f(x) \in f(X) \subset Y$ funkcija g preslikava u element $g\big(f(x)\big) \in Z$. Tada se funkcija koja za svako $x \in X$ ima vrednost $g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$ naziva složena funkcija ili kompozicija funkcija f i g i označava se sa $g \circ f$.

Definicija 1.5. Neka $A, B \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f : A \to B$ data funkcija. Ako postoji funkcija $g : B \to A$ takva da važi

(1) $f\big(g(x)\big) = x$ za svako $x \in B$

(2) $g\big(f(x)\big) = x$ za svako $x \in A$,

kažemo da je funkcija g inverzna funkcija funkcije f i označavamo je sa f^{-1}.

Grafik funkcije $y = f^{-1}(x)$ simetričan je grafiku funkcije $y = f(x)$ u odnosu na pravu $y = x$.

Inverzna funkcija funkcije f ne mora da postoji, a bliže uslove pod kojima funkcija f ima inverznu funkciju daje naredna teorema.

TEOREMA 1.1. Neka je $f : A \longrightarrow B$ bijekcija. Tada postoji jedinstvena bijekcija $g : B \longrightarrow A$ takva da je (1) $f\big(g(x)\big) = x$ za svako $x \in B$ (2) $g\big(f(x)\big) = x$ za svako $x \in A$,

DOKAZ: (a) Ako je $f : A \longrightarrow B$ sirjekcija, onda može postoji najviše jedna funkcija $g : B \longrightarrow A$ takva da je $(g \circ f)(x) = x$ za svako $x \in A$.

Zaista, ako bi postojale dve funkcije g_1, g_2 sa tim svojstvom, onda pretpostavka $g_1 \neq g_2$ vodi ka egzistenciji bar jednog elementa $z \in B$ takvog da je $g_1(z) \neq g_2(z)$. Kako je f sirjekcija, postoji $x \in A$ takvo da je $z = f(x)$. Ali tada je $g_1\big(f(x)\big) \neq g_2\big(f(x)\big)$, što je u suprotnosti sa $g_1 \circ f = g_2 \circ f = \mathbf{1}_A$ ($\mathbf{1}_A$ je identično preslikavanje skupa A, tj. funkcija definisana sa $\mathbf{1}_A(x) = x$ za svako $x \in A$). Prema tome, mora biti $g_1 = g_2$.

(b) Ako je $f : A \longrightarrow B$ injekcija, onda može postojati najviše jedna funkcija $g : B \longrightarrow A$ takva da je $(f \circ g)(y) = y$ za svako $y \in B$.

Zaista, ako bi postojale dve takve funkcije g_1, g_2, onda zbog pretpostavke $g_1 \neq g_2$ postoji bar jedan element $z \in B$ takav da je $g_1(z) \neq g_2(z)$. Kako je f injekcija, onda je $f\big(g_1(z)\big) \neq f\big(g_2(z)\big) = \mathbf{1}_B$, a to je kontradikcija sa $f \circ g_1 = f \circ g_2$.

(c) Ako za funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoje funckije $g_1, g_2 : B \longrightarrow A$ takve da je

$(g_1 \circ f)(x) = x$ za svako $x \in A$,

$(f \circ g_2)(y) = y$ za svako $y \in B$,

onda je $g_1 = g_2$ i f je bijekcija.

Za proizvoljno $y \in B$ imamo $g_2(y) \in A$, pa je

$$g_2(y) = (g_1 \circ f)(g_2(y)) = g_1\Big(f(g_2(y))\Big) = g_1(y)\,,$$

što povlači da je $g_2 = g_1$. Prema tome, postoji funkcija $g : B \longrightarrow A$ takva da je

$(g \circ f)(x) = x$ za svako $x \in A$,

$(f \circ g)(y) = y$ za svako $y \in B$.

Iz $g \circ f = \mathbf{1}_A$ sledi da je f injekcija, a iz $f \circ g = \mathbf{1}_B$ da je f sirjekcija. Dakle, f je bijekcija.

(d) Neka je $f : A \longrightarrow B$ bijekcija. Za svako $y \in B$ postoji $x \in A$ takvo da je $y = f(x)$. Kako je f injekcija, takvo x je jedinstveno. Na taj način svakom elementu $y \in B$ pridržen je jedinstven element $x \in A$ takav da je $y = f(x)$. Označimo li sa $g : B \longrightarrow A$ funkciju koja $y \longrightarrow x$, tada za svako $x \in A$ imamo

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = x$$

i za svako $y = f(x) \in B$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = f((g \circ f)(x)) = f(x) = y\,.$$

Time je dokazano da funkcija g ima tražene svojstva iz Definicije 1.5. ■

Definicija 1.6. Neka $f : A \to \mathbb{R}$, gde skup $A \subset \mathbb{R}$ ima osobinu da ako $x \in A$ onda $-x \in A$. Funkcija f je parna na A ako za svako $x \in A$ važi $f(-x) = f(x)$, a neparna na A ako za svako $x \in A$ važi $f(-x) = -f(x)$.

Ističemo sledeća svojstva parnih i neparnih funkcija:

- Grafik parne funkcije simetričan je u odnosu na y-osu, a grafik neparne funkcije simetričan je u odnosu na koordinatni početak.
- Ako su f i g parne funkcije, onda su i funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$ i f/g parne funkcije.
- Ako su f i g neparne funkcije, onda su funkcije $f \pm g$ neparne funkcije, a $f \cdot g$ i f/g su parne funkcije.
- Ako je f parna funkcija i g neparna funkcija, onda je $f \cdot g$ neparna funkcija.

Definicija 1.7. Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je :

(a) rastuća, ako je tačna implikacija

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ \big(x < y \to f(x) < f(y)\,.$$

(b) neopadajuća, ako je tačna implikacija

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ \big(x < y \to f(x) \leq f(y)\big)\,.$$

(c) opadajuća, ako je tačna implikacija

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ \big(x < y \to f(x) > f(y)\big)\,.$$

(d) nerastuća, ako je tačna implikacija

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ \big(x < y \to f(x) \geq f(y)\big)\,.$$

Ako je funkcija neopadajuća ili nerastuća kažemo da je monotona funkcija, a ako je funkcija opadajuća ili rastuća kažemo da je strogo monotona funkcija.

Teorema 1.2. Neka je funkcija f strogo monotona funkcija koja preslikava segment $[a, b]$ na segment $[\alpha, \beta]$. Tada postoji inverzna funkcija f^{-1} koja preslikava $[\alpha, \beta]$ na $[a, b]$ i koja je takođe strogo monotona.

Dokaz: Neka je f rastuća funkcija na $[a, b]$. Ako pokažemo da je f bijekcija prema prethodnoj teoremi postoji inverzna funkcija f^{-1} funkcije f. Zaista, prema pretpostavci f je surjekcija. S druge strane, ako je $x \neq y$, recimo $x < y$, tada je $f(x) < f(y)$, tj. $f(x) \neq f(y)$, pa je f i injekcija.

Dokažimo da je f^{-1} rastuća funkcija. Kako je f rastuća funkcija, za svako $x_1, x_2 \in [a, b]$ važi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

ili ekvivalentno

$$f(x_2) \leq f(x_1) \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq x_1\,.$$

Neka je $y_1 = f(x_1)$ i $y_2 = f(x_2)$, tj. $x_1 = f^{-1}(y_1)$ i $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Tada prethodna nejednakost postaje

$$y_2 \leq y_1 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(y_1)\,.$$

što znači da je f^{-1} rastuća funkcija. ■

Definicija 1.8. Neka je $f : A \to \mathbb{R}$ i $a \in A$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna u tački a ako je

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

Ako su funkcije f, g neprekidne u tačka a, onda su u tački a neprekidne i funkcije

$$c \cdot f, \quad f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad (c \in \mathbb{R})\,.$$

Funkcija $\dfrac{f}{g}$ je takođe neprekidna u tački a, ako je $g(a) \neq 0$.

Kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

2. Stepena funkcija sa prirodnim izložiocem

Definicija 2.1. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana formulom $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, naziva se stepena funkcija sa prirodnim izložiocem.

Funkcija $y = x$ je neprekidna, pa je onda i funkcija $y = x^n$ neprekidna kao prozivod neprekidnih funkcija.

Teorema 2.1. Funkcija $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Posmatrajmo jednačinu

$$x^n = a \tag{1}$$

Da bi definisali pojam korena od posebnog značaja je sledeća teorema:

Teorema 2.2. Neka je $a \in \mathbb{R}$, a $n \in \mathbb{N}$. Tada jednačina (1) ima:
(1) tačno jedno rešenje ako je n neparan broj;
(2.1) tačno dva rešenja ako je $a > 0$ i n paran broj;
(2.2) tačno jedno rešenja ako je $a = 0$ i n paran broj;
(2.3) nema rešenja ako je $a < 0$ i n neparan broj;

Definicija 2.2. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. Simbol $\sqrt[n]{a}$ označava
(1) jedinstveno realno rešenje jednačine $x^n = a$ ako je n neparan broj;
(2) pozitiVno rešenje jednačine $x^n = a$ ako je $a > 0$ i n paran broj;
(3)$\sqrt{0} = 0$.

Posmatrajmo najpre funkciju $f(x) = x^{2n+1}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

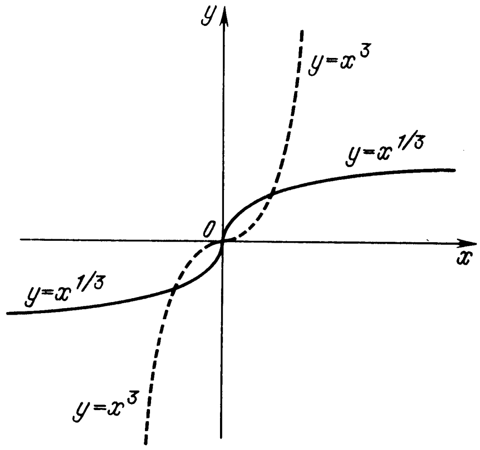
- Funkcija f je definisana za sve realne vrednosti x, tj. njen domen je skup $\mathbb{R}$
- Funkcija f je neparna
- $f(x) > 0$ za $x > 0$ i $f(x) < 0$ za $x < 0$
- $f(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$
- Funkcija f je strogo rastuća na $\mathbb{R}$
- Funkcija f je bijekcija

  Za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ iz $f(x_1) = f(x_2)$ tj. $x_1^{2n+1} = x_2^{2n+1}$
  sledi $x_1 = x_2$, pa je f injekcija. Za svako $y \in \mathbb{R}$ postoji
  $x = \sqrt[2n+1]{y} \in \mathbb{R}$ za koje je $f(x) = x^{2n+1} = y$
- Funkcija

  $$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(y) = \sqrt[2n+1]{y}, \; y \in \mathbb{R}$$

  je inverzna funkciji f.

Na sledećoj slici prikazani su grafici uzajamno inverznih funkcija $y = x^3$ i $y = \sqrt[3]{x}$.



Osnovna svojstva funkcije $y = \sqrt[2n+1]{x}$ su sledeća:

- Funkcija je definisana za sve realne vrednosti x
- Znak funkcije se poklapa sa znakom nezavisno promenljive, tj. važi $\sqrt[2n+1]{x} > 0$ ako i samo ako $x > 0$, odnosno $\sqrt[2n+1]{x} < 0$ ako i samo ako $x < 0$
- $\sqrt[2n+1]{x} = 0$ ako i samo ako $x = 0$
- Funkcija je strogo rastuća na $\mathbb{R}$
- Funkcija je neparna, tj. važi $\sqrt[2n+1]{-x} = -\sqrt[2n+1]{x}$ za svako $x \in \mathbb{R}$

Posmatrajmo sada funkciju $f(x) = x^{2n}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

- Funkcija f je definisana za sve realne vrednosti x
- Funkcija f je parna
- $f(x) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i $f(x) = 0$ ako i samo ako $x = 0$
- Funkcija f je rastuća na $(0, +\infty)$ i opadajuća na $(-\infty, 0)$.
- Funkcija f nije ni "1-1" ni "NA":
  Zaista, na primer, važi $f(-1) = f(1)$, što znači da nije "1-1".
  S druge strane, za $y = -1 \in \mathbb{R}$ ne postoji $x \in \mathbb{R}$ takvo da je
  $x^{2n} = -1 = y$, pa funkcija nije ni "NA".
  Dakle, ova funkcija nije bijekcija, pa nema inverznu funkciju.

Posmatrajmo funkciju

$$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad g(x) = x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}_0^+ .$$

Funkcija g je bijekcija. Zaista, ona je "1-1", jer iz $g(x_1) = g(x_2)$, tj. $x_1^{2n} = x_2^{2n}$ i $x_1, x_2 \geq 0$ sledi $x_1 = x_2$. Takođe ona je "NA", jer prema Teoremi 2.2. za svaki nenegativan broj y postoji jedinstven nenegativan broj x, takav da je $g(x) = x^{2n} = y$.

Funkcija

$$h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad h(y) = \sqrt[2n]{y}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+$$

je inverzna funkcija funkcije g.

Analogno, inverzna funkcija bijekcije

$$g_1 : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+, \quad g_1(x) = x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}_0^-,$$

je funkcija

$$h_1 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-, \quad h_1(y) = -\sqrt[2n]{y}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+ .$$

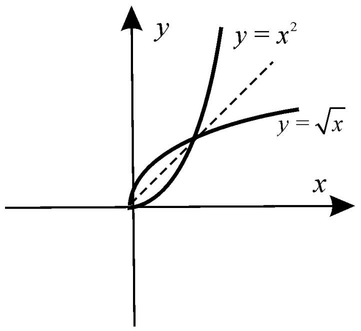
Na sledećoj slici prikazani su prvo grafici uzajamno inverznih funkcija

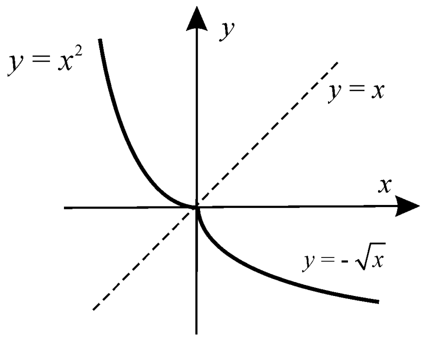
$$y = x^2, x \geq 0 \ \text{ i } \ y = \sqrt{x}$$

(obe funkcije su monotono rastuće - videti Teoremu 1.2.), a zatim grafici uzajamno inverznih funkcija

$$y = x^2, \ x \leq 0 \ \text{ i } \ y = -\sqrt{x}$$

(obe funkcije su monotono opadajuće).





Osnovna svojstva funkcije $y = \sqrt[2n]{x}$ su sledeća:

- Funkcija je definisana za nenegativne vrednosti x, tj. njen domen je $[0, +\infty)$
- Funkcije je nenegativna tj. $\sqrt[2n]{x} > 0$ za svako $x > 0$
- $\sqrt[2n]{x} = 0$ ako i samo ako $x = 0$
- Funkcija je strogo rastuća na $\mathbb{R}$
- Funkcija nije ni parna ni neparna

3. Stepena funkcija sa racionalnim izložiocem

Pri definisanju stepenovanja celobrojnim izložiocem, a zatim i pri definisanju stepenovanja racionalnim izložiocem vodi se računa da se sačuvaju svojstva stepenovanja prirodnim brojem, tako da za svako $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i svako $m, n \in \mathbb{N}$ važi:

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

(2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

(3) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

(4) $(a : b)^m = a^m : b^m$;

(5) $(a^m)^n = a^{m\,n}$.

Definicija 3.1. Za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $a^0 = 1$, a za $n \in \mathbb{N}$ je $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Definicija 3.2. Neka je $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Definicija 3.3. Neka je $x > 0$ i $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definisana formulom $x^r = (x^{1/n})^m$, $x > 0$ naziva se stepena funkcija sa racionalnim izložiocem.

Funkcija $x^{1/n}$ je neprekidna i strogo rastuća za $x > 0$. Funkcija t^m je neprekidna za $t > 0$, strogo rastuća ako je $m \geq 0$ i strogo opadajuća, ako je $m < 0$. Zato je funkcija x^r, $r \in \mathbb{Q}$ neprekidna za $x > 0$, strogo rastuća ako je $r \geq 0$ i strogo opadajuća ako je $r < 0$.

Navodimo neka svojstva stepena sa racionalnim izložiocem:

(A) $(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}, \quad a > 0$;;

(B) $a^r > 1 \quad$ za $r \in \mathbb{Q}, \quad a > 1, \quad r > 0$;;

(C) $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ za $a > 0, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad r_2 \in \mathbb{Q}$;;

(D) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$ za $a > 0, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad r_2 \in \mathbb{Q}$;;

(E) $a^{r_1} > a^{r_2} > 0$ za $a > 0, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad r_2 \in \mathbb{Q}, \quad r_1 > r_2$..

Navedena svojstva se lako pokazuju, korišćenjem svojstva stepena sa celim izložiocem i činjenicom da ako je $a > 0$, $b > 0$ iz $a^n = b^n$, $n \in \mathbb{N}$ sledi $a = b$.

4. Eksponencijalna funkcija

Postavlja se pitanje, može li se i za one brojeve $x \in \mathbb{R}$ koji nisu racionalni definisati a^x, ali tako da ostanu na snazi osnovna svojstva stepena. Odgovor na postavljeno pitanje je potvrdan, ali dokaz te činjenice nije jednostavan.

Da bi definisali eksponencijalnu funkciju $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ pokazaćemo najpre sledeće tvrđenja:

Stav 4.1. Ako je $a > 1$, onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako $r \in \mathbb{Q}$ takvo da je $|r| < \delta$ važi $|a^r - 1| < \varepsilon$.

Dokaz: Kako je $\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$ i $\lim_{n\to+\infty} a^{-1/n} = 1$, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tako da je

$$0 < a^{1/p} - 1 < \varepsilon, \quad 0 < 1 - a^{-1/p} < \varepsilon\,, \quad \text{za } a > 1\,.$$

Odavde sledi da je

$$1 - \varepsilon < a^{-1/p} < a^{1/p} < 1 + \varepsilon\,.$$

Neka je r proizvoljan racionalan broj takav da je $|r| < 1/p$, tj. $-1/p < r < 1/p$. Tada, kako je za $a > 1$ funkcija a^r, $r \in \mathbb{Q}$ rastuća sledi

$$a^{-1/p} < a^r < a^{1/p}\,.$$

Dakle, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = 1/p > 0$ tako da za sve racionalne brojeve r koji zadovoljavaju uslov $|r| < \delta$ važe nejednakosti

$$1 - \varepsilon < a^{-1/p} < a^r < a^{1/p} < 1 + \varepsilon\,,$$

tj. $-\varepsilon < a^r - 1 < \varepsilon$. ■

Stav 4.2. Ako niz $\{r_n\}$ racionalnih brojeva konvergira, onda niz $\{a^{r_n}\}$, za $a > 1$ takođe konvergira.

DOKAZ: Kako je niz $\{r_n\}$ konvergentan on je ograničen, tj. postoji $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ je

$$\alpha \leq r_n \leq \beta\,,$$

odakle kako je $a > 1$ imamo da je

$$a^{\alpha} \leq a^{r_n} \leq a^{\beta}\,.$$

Kako je $a^{\alpha} > 0$, ako označimo sa $C = a^{\beta}$, imamo da

$$\exists C > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ 0 < a^{r_n} \leq C. \tag{2}$$

Prema Stavu 4.1.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall r \in \mathbb{Q} : \ |r| < \delta \ \rightarrow \ |a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{C}. \tag{3}$$

Iz konvergencije niza $\{r_n\}$ za $\delta > 0$ postoji N_ε takvo da

$$\forall n \geq N_\varepsilon \ \forall m \in N_\varepsilon \ \rightarrow |r_n - r_m| < \delta \tag{4}$$

Iz (3) i (4) sledi da je

$$\forall n \geq N_\varepsilon \ \forall m \in N_\varepsilon \ \rightarrow |a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{C}\,. \tag{5}$$

Iz (2) i (5) je onda

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = |a^{r_m}(a^{r_n - r_m} - 1)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

za svako $n \geq N_\varepsilon$ i svako $m \geq N_\varepsilon$, tj. niz $\{a^{r_n}\}$ je konvergentan. ■

Pojam eksponencijalne funkcije

Neka je x proizvoljan realan broj i $\{r_n\}$ niz racionalnih brojeva koji konvergira ka x tj. $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Ovaj niz postoji jer je skup $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$. Neka je $a > 0$. Tada možemo definisati sa

$$a^x \overset{def}{=} \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \tag{6}$$

Ako je $a > 1$, onda granična vrednost (6) postoji prema Stavu 4.1. Ako je $0 < a < 1$, onda je $a^{r_n} = 1/b^{r_n}$, gde je $b = 1/a > 1$, odakle sledi da granična vrednost (6) postoji i za $a \in (0,1)$, jer je $\lim_{n\to+\infty} b^{r_n} = b^x > 0$.

Definicija eksponencijalne funkcije je korektna, tj. granična vrednost (6) ne zavisi od izbora niza racionalnih brojeva $\{r_n\}$ koji konvergira ka x. Ova činjenica sledi iz poznatog svojstva granične vrednosti funkcije.

Svojstva eksponencijalne funkcije

SVOJSTVO 4.1. Za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ važi

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}\,.$$

DOKAZ: Neka su $\{r_n\}$ i $\{\rho_n\}$ nizovi racionalnih brojeva takvi da je $\lim_{n\to+\infty} r_n = x_1$, $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = x_2$. Tada je $\lim_{n\to+\infty}(r_n + \rho_n) = x_1 + x_2$ i prema Stavu 4.2. postoje granične vrednosti

$$\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = a^{x_1}, \quad \lim_{n\to+\infty} a^{\rho_n} = a^{x_2}, \quad \lim_{n\to+\infty} a^{r_n + \rho_n} = a^{x_1 + x_2}\,.$$

Kako je prema svojstvu (C) stepena sa racionalnim izložiocem $a^{r_n + \rho_n} = a^{r_n}\, a^{\rho_n}$ to je

$$a^{x_1 + x_2} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n + \rho_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}\, a^{\rho_n} = a^{x_1}\, a^{x_2}\,. \ \blacksquare$$

Monotonost eksponencijalne funkcije

SVOJSTVO 4.2. Funkcija $y = a^x$ za $a > 1$ je rastuća.

DOKAZ: Primetimo najpre da važi

$$a^x > 1 \quad \text{za} \quad x > 0\,. \tag{7}$$

Zaista, neka je $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < x$ i $\{r_n\}$ niz racionalnih brojeva takav da je $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$ i $r_n > r$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a^{r_n} > a^r > 1$ (zbog svojstva (E) stepena sa racionalnim izložiocem), odakle prelazkom na $\lim$ imamo da je $a^x \geq a^r > 1$, tj. važi nejednakost (7).

Neka su sada $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ proizvoljni. Prema (7) važi $a^{x_2 - x_1} > 1$ za $x_2 > x_1$, tj. imamo da je $a^{x_2} > a^{x_1}$ za $x_2 > x_1$, što znači da je funkcija $y = a^x$ za $a > 1$ rastuća. ∎

Neprekidnost eksponencijalne funkcije

SVOJSTVO 4.3. Funkcija $y = a^x$ za $a > 1$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.

DOKAZ: Neka je x_0 proizvoljna tačka iz $\mathbb{R}$,

$$\Delta y = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)\,.$$

Treba pokazati da $a^{\Delta x} \longrightarrow 1$ kada $\Delta x \longrightarrow 0$ ili

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1\,. \tag{8}$$

Neka je $\{x_n\}$ proizvoljan niz realnih brojeva takav da $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Zbog svojstva skupa realnih brojeva postoje nizovi racionalnih brojeva $\{r_n\}$ i $\{\rho_n\}$ takvi da je

$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < \rho_n < x_n + \frac{1}{n}\,,$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Sada prema Svojstvu 4.2. imamo da je

$$a^{r_n} < a^{x_n} < a^{\rho_n}\,. \tag{9}$$

Kako $r_n \longrightarrow 0$ i $\rho_n \longrightarrow 0$ kada $n \longrightarrow +\infty$, prema Svojstvu 4.1. je $\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = 1$ i $\lim_{n\to+\infty} a^{\rho_n} = 1$. Dakle, koristeći nejednakost (9) dobija se $\lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = 1$. Pokazali smo (8) odakle sledi da je

$$\lim_{\Delta x\to 0} a^{x_0+\Delta x} = a^{x_0}\,,$$

tj. funkcija a^x je neprekidna na $\mathbb{R}$. ∎

SVOJSTVO 4.4. Za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ važi

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}\,.$$

DOKAZ: (a) Neka je najpre $x_2 = r \in \mathbb{Q}$, $x_1 \in \mathbb{R}$ i $\{r_n\}$ niz racionalnih brojeva takav da je $\lim_{n\to+\infty} r_n = x_1$. Tada je prema svojstvu (D) stepena sa racionalnim izložiocem

$$(a^{r_n})^r = a^{r\,r_n}. \tag{10}$$

Kako je $\lim_{n\to+\infty} r\,r_n = r\,x_1$, prema definiciji eksponencijalne funkcije je $\lim_{n\to+\infty} a^{r\,r_n} = a^{r\,x_1}$, tj. zajedno sa (10) imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} (a^{r_n})^r = a^{r\,x_1}\,. \tag{11}$$

Označimo sa $a^{r_n} = t_n$ i $a^{x_1} = t_0$. Tada prema definiciji eksponencijalne funkcije postoji $\lim_{n\to+\infty} t_n = t_0$ i zbog neprekidnosti eksponencijalne funkcije sa racionalnim izložiocem $g(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$ imamo da je $\lim_{n\to+\infty} g(t_n) = g(t_0)$, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} (a^{r_n})^r = (a^{x_1})^r\,. \tag{12}$$

Iz (11) i (12) imamo da je

$$(a^{x_1})^r = a^{x_1 r} \quad \text{za svako } x_1 \in \mathbb{R} \;\text{ i svako } r \in \mathbb{Q}. \tag{13}$$

(b) Neka su sada x_1 i x_2 proizvoljni realni brojevi i $\{\rho_n\}$ niz racionalnih brojeva takav da je $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = x_2$. Iz (13) za $r = \rho_n$ dobija se

$$(a^{x_1})^{\rho_n} = a^{x_1 \rho_n}. \tag{14}$$

Kako je $\lim_{n\to+\infty} x_1\rho_n = x_1x_2$, prema Svojstvu 4.3. je $\lim_{n\to+\infty} a^{x_1\rho_n} = a^{x_1x_2}$, a zbog (14) je

$$\lim_{n\to+\infty} (a^{x_1})^{\rho_n} = a^{x_1x_2}\,. \tag{15}$$

S druge strane, ako označimo sa $a^{x_1} = b$, prema definiciji eksponencijalne funkcije imamo da je

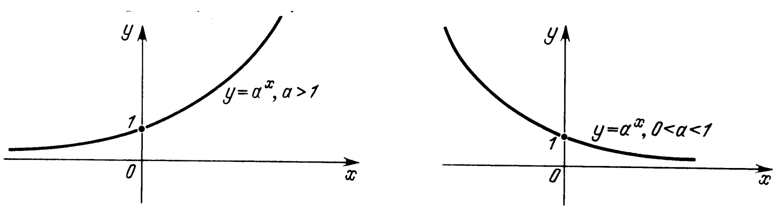
$$\lim_{n\to+\infty} (a^{x_1})^{\rho_n} = \lim_{n\to+\infty} b^{\rho_n} = b^{x_2} = (a^{x_1})^{x_2}\,. \tag{16}$$

Konačno, iz (15) i (16) zaključujemo da dato svojstvo ekponencijalne funkcije važi za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. ■

Osnovna svojstva eksponencijalne funkcije $y = f(x) = a^x$, $a > 0$ su:

- funkcija f je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, a skup vrednosti funkcije je interval $(0, +\infty)$, tj. $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$
- funkcija je pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$
- nule funkcije ne postoje
- funkcija f je monotono rastuća na $\mathbb{R}$ za $a > 1$ i monotono opadajuća na $\mathbb{R}$ za $0 < a < 1$

Grafici funkcije $y = a^x$ za $a > 1$ i $0 < a < 1$ su:



5. Logaritamska funkcija

Funkcijom

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = a^x = y \in \mathbb{R}^+$$

ostvaruje se bijektivno preslikavanje skupa $\mathbb{R}$ na skup $\mathbb{R}^+$, pa postoji inverzna funkcija ove funkcije koja je data sa

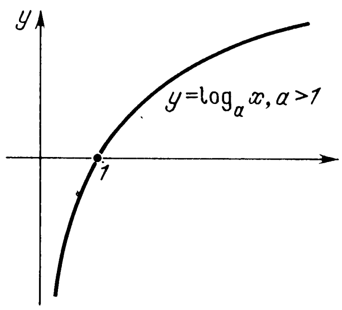
$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^+ \ni y \mapsto f^{-1}(y) = \log_a y = x \in \mathbb{R}\,.$$

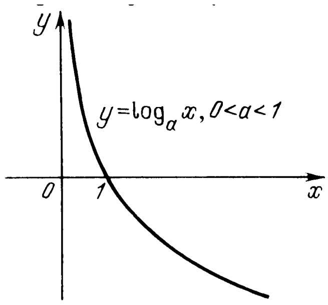
Funkcija

$$y = \log_a x, \quad a > 0,\; a \neq 1,\; x > 0\,,$$

naziva se logaritamska funkcija.

Grafici funkcije $y = \log_a x$ za $a > 1$ i $0 < a < 1$ su:





Osnovna svojstva logaritamske funkcije $y = f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ su:

• funkcija f je definisana za svako $x \in \mathbb{R}^+$

• za $0 < a < 1$ funkcija je pozitivna za $x \in (0, 1)$ i negativna za $x \in (1, +\infty)$, a za $a > 1$ funkcija je pozitivna za $x \in (1, +\infty)$ i negativna za $x \in (0, 1)$

• nula funkcije je $x = 1$

• funkcija f je monotono rastuća na $\mathbb{R}^+$ za $a > 1$ i monotono opadajuća na $\mathbb{R}^+$ za $0 < a < 1$

6. Trigonometrijske funkcije

(i) Sinusna funkcija. Funkcija $f(x) = \sin x$ je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, a skup vrednosti funkcije je segment $[-1, 1]$, tj. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

• funkcija f je neparna i periodična sa osnovnom periodom 2π (zato je dovoljno iskazati svojstva funkcije samo na segmentu $[0, 2\pi]$)

• funkcija je pozitivna za $x \in (0, \pi)$ i negativna za $x \in (\pi, 2\pi)$

• nule funkcije f su u tačkama $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

• funkcija je monotono rastuća na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ i monotono opadajuća na $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Sinusna funkcija je osnovna elementarna funkcija. Ostale trigonometrijske funkcije definišemo sa

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

(ii) Kosinusna funkcija. Funkcija $g(x) = \cos x$ je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, a skup vrednosti funkcije je segment $[-1, 1]$, tj. $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

• funkcija g je parna i periodična sa osnovnom periodom 2π

• nule funkcije g su u tačkama $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

• funkcija je monotono opadajuća na $[0, \pi]$ i monotono rastuća na $[\pi, 2\pi]$

(iii) Tanges. Funkcija $h(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$ izuzev u tačkama $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, a skup vrednosti funkcije je $\mathbb{R}$.

- funkcija h je neparna i periodična sa osnovnom periodom π
- nule funkcije h su u tačkama $x = k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- funkcija je monotono rastuća

(iv) Kotanges. Funkcija $k(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$ izuzev u tačkama $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a skup vrednosti funkcije je $\mathbb{R}$.

- funkcija k je neparna i periodična sa osnovnom periodom π
- nule funkcije h su u tačkama $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
- funkcija je monotono opadajuća

Neprekidnost trigonometrijskih funkcija

TEOREMA 6.1. Funkcije $y = \sin x$ i $y = \cos x$ su neprekidne na $\mathbb{R}$.

DOKAZ: Neka je x_0 proizvoljna tačka iz $\mathbb{R}$. Tada

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x - x_0}{2}\,\cos\frac{x + x_0}{2}\,.$$

Kako je

$$\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le \frac{|x - x_0|}{2}, \qquad \left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \le 1\,,$$

to je $|\sin x - \sin x_0| \le |x - x_0|$, odakle sledi da je funkcija $y = \sin x$ neprekidna u tački x_0.

Analogno, kako je $\cos x - \cos x_0 = -2\sin\dfrac{x + x_0}{2}\,\sin\dfrac{x_0 - x}{2}$ sledi da je $|\cos x - \cos x_0| \le |x - x_0|$, zbog čega je funkcija $y = \cos x$ neprekidna u tački x_0. ■

Iz neprekidnosti funkcija $y = \sin x$ i $y = \cos x$ sledi da je funkcija $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ neprekidna, ako je $\cos x \ne 0$, tj. $x \ne \dfrac{\pi}{2} + n\,\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a funkcija $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ je neprekidna, ako je $x \ne n\,\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. INVERZNE TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

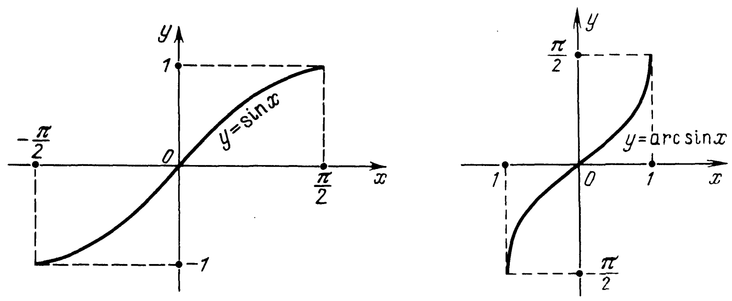
Inverzne trigonometrijske funkcije nazivaju se **ciklometrijske** ili **arkus** funkcije.

(i) Arkus sinus. Funkcija $f(x) = \sin x$ nema inverznu funkciju, jer nije bijekcija. Na primer, svi brojevi oblika $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ preslikavaju se ovom funkcijom u broj 1. Međutim, posmatrajmo restrikciju funkcije $f(x)$ na $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, tj. funkciju

$$f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad \text{gde je} \quad f_1(x) = \sin x\,.$$

Funkcija $f_1(x)$ je rastuća funkcija, pa postoji njena inverzna funkcija $f_1^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ koja se naziva arkus sinus i označava se sa $F(x) = \arcsin x$.

Grafik funkcije $y = \arcsin x$ simetričan je grafiku funkcije $f_1(x)$ u odnosu na pravu $y = x$.



Prema svojstvima uzajamno inveznih funkcija važe jednakosti:

$$\boxed{\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1]\,.}$$

Osnovna svojstva funkcije $F(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ su:

- funkcija F je neparna, tj. važi

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad x \in [-1, 1]\,.$$

- funkcija je pozitivna za $x \in (0, 1]$ i negativna za $x \in [-1, 0)$
- nula funkcija F je $x = 0$
- funkcija je monotono rastuća

PRIMER: Nacrtati grafik funkcije $y = \arcsin(\sin x)$.

Funkcija je definisana na $\mathbb{R}$ i periodična je sa periodom 2π. Zato je dovoljno odrediti grafik funkcije na segmentu $[-\pi/2, 3\pi/2]$.

Ako je $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, onda je $y = \arcsin(\sin x) = x\,.$

Za $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ je $-\pi/2 \le x - \pi \le \pi/2$, pa je

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = x - \pi\,.$$

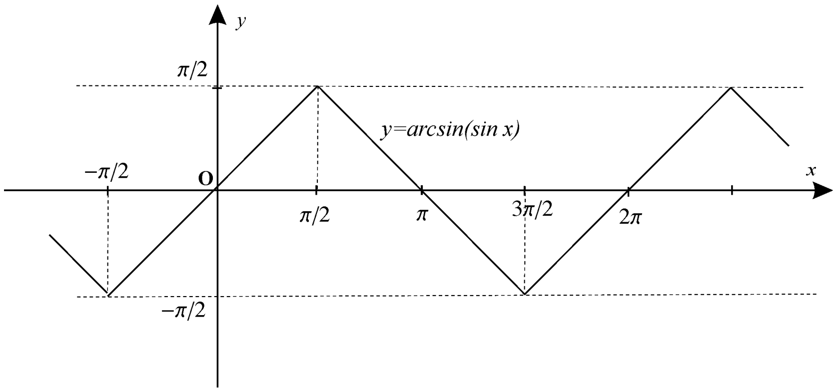
S druge strane, $\sin(x - \pi) = -\sin x$ i zato je

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x),$$

zbog neparnosti funkcije $\arcsin x$. Dakle, $x - \pi = -\arcsin(\sin x)$ za $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Konačno, imamo da je

$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

Grafik funkcije $y = \arcsin(\sin x)$ prikazan je na sledećoj slici:



(ii) Arkus kosinus. Funkcija

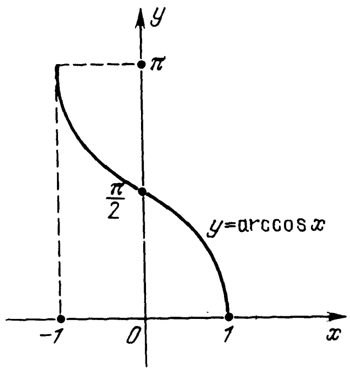
$$\boldsymbol{g_1 : [0, \pi] \to [-1, 1], \quad g_1(x) = \cos x, \ x \in [0, \pi]}$$

je neprekidna i opadajuća. Njena inverzna funkcija

$$\boldsymbol{G : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad G(x) = \arccos x, \quad x \in [-1, 1]}$$

je takođe neprekidna i opadajuća.

Grafik funkcije $\boldsymbol{y = \arccos x}$ prikazan je na sledećoj slici:



Važe jednakosti:

$$\boxed{\boldsymbol{\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi], \qquad \cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1, 1]\,.}}$$

Osnovna svojstva funkcije $\boldsymbol{G(x) = \arccos x}$, $\boldsymbol{x \in [-1, 1]}$ su:

- funkcija $\boldsymbol{G}$ nije ni parna ni neparna, već važi

$$\boldsymbol{\arccos(-x) = \pi - \arccos x}$$

- funkcija $\boldsymbol{G}$ je pozitivna za svako $\boldsymbol{x \in [-1, 1)}$
- nula funkcija $\boldsymbol{G}$ je $\boldsymbol{x = 1}$
- funkcija je monotono opadajuća

STAV 7.1. Za svako $x \in [-1,1]$ važe jednakosti:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \qquad \text{(A)}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(B)}$$

DOKAZ: (a) Označimo sa $\arccos x = \alpha$. Tada prema definiciji funkcije $\arccos x$ je $\cos\alpha = x$, $0 \le \alpha \le \pi$. Onda je $0 \le \pi - \alpha \le \pi$ i $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -x$. Opet prema definiciji funkcije $\arccos x$ je $\pi - \alpha = \arccos(-x)$. Ovim je formula (A) dokazana.

(b) Označimo sa $\arcsin x = \alpha$. Tada prema definciji funkcije $\arcsin x$ je $\sin\alpha = x$, $-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2$. Onda je $0 \le \pi/2 - \alpha \le \pi$ i $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha = x$. Sada prema definiciji funkcije $\arccos x$ je $\pi/2 - \alpha = \arccos x$. Ovim je i formula (B) dokazana. ∎

(iii) Arkus tanges. Funkcija

$$h_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad h_1(x) = \operatorname{tg} x, \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

je neprekidna i rastuća. Njena inverzna funkcija

$$H : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad H(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

je takođe neprekidna i rastuća.

Važe jednakosti:

$$\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Za funkciju $H(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ važi:

- funkcija H je neparna, tj. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$
- funkcija je negativna za $x < 0$, pozitivna za $x > 0$ i nula funkcije je $x = 0$
- funkcija je monotono rastuća

(iv) Arkus kotanges. Funkcija $K(x) = \operatorname{arcctg} x$, $K : \mathbb{R} \to [0,\pi]$ je inverzna za monotonu funkciju $k_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ datu sa $k_1(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in [0,\pi]$.

Važe jednakosti:

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad x \in [0,\pi], \qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

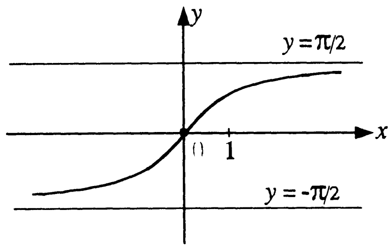
Za funkciju $y = K(x) = \operatorname{arcctg} x$ važi:

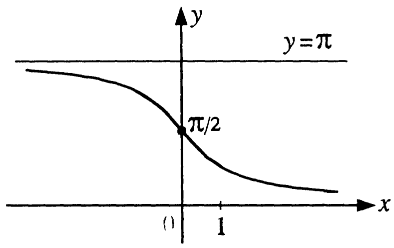
- funkcija K nije ni parna ni neparna, već važi

$$\operatorname{arcctg}(-x) = -\operatorname{arcctg} x + \pi$$

- funkcija K nema nule
- funkcija je monotono opadajuća

Grafici funkcija $\boldsymbol{y = \operatorname{arctg} x}$ i $\boldsymbol{y = \operatorname{arcctg} x}$ su:





STAV 7.2. Za svako $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ važe jednakosti:

$$\boldsymbol{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \tfrac{\pi}{2}}, \tag{C}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{arcctg}(-x) = -\operatorname{arcctg} x + \pi}. \tag{D}$$

Veze između ciklometrijskih funkcija istog ugla:

STAV 7.3. Važe sledeće jednakosti:

$$\boldsymbol{\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [0,1]}$$

$$\boldsymbol{\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [0,1]}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}}$$

DOKAZ: Označimo sa $\boldsymbol{\arcsin x = \alpha}$. Tada prema definiciji funkcije $\boldsymbol{\arcsin x}$ je $\boldsymbol{\sin\alpha = x}$, $\boldsymbol{0 \le \alpha \le \pi/2}$. Onda je

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}},$$

odakle je $\boldsymbol{\alpha = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$. ■